Ce "cahier de vacances" est destiné aux élèves entrant en 1ère année de BCPST.
Il propose en 8 fiches de faire le tour des notions INDISPENSABLES à tout bachelier qui envisage des études scientifiques :

1. puissances, racine, ln et exponentielle
2. fractions, second degré
3. équations, inéquations
4. trigonométrie, nombres complexes
5. suites arithmétiques, suites géométriques
6. dérivées, primitives, intégrales
7. limites de suites et de fonctions
8. géométrie dans le plan

Chaque fiche se présente sous la forme d'un livret de 4 pages :

page 1 : des rappels de cours (définitions, propriétés, ...).
pages 2 et 3 : des exercices d'applications, éventuellement proposés sous forme de QCM.
page 4 : les réponses des exercices ou des éléments de solutions.

Les rappels de cours ne sont pas exhaustifs et les exercices sont élémentaires mais ils doivent être parfaitement maîtrisés afin d'aborder sereinement les cours de maths en BCPST dès la rentrée.

En début d'année, nous consacrerons une séance de travail à la correction de ces exercices. Il est donc conseillé de conserver soigneusement vos calculs et pas seulement les résultats.

puissances

définitions : $n \in \mathbb{N}$:

pour $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x^0 = 1}$ et $\boxed{x^n = x \times ... \times x \text{ , } n \text{ fois}}$

pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}}$ en particulier $\boxed{x^{-1} = \dfrac{1}{x}}$

propriétés : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \quad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \quad \frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha}}$$

racine carrée

définition : Soit x un réel positif : $\boxed{y = \sqrt{x}}$ est l'unique réel positif tel que $\boxed{y^2 = x}$

propriétés :

pour x et y des réels positifs : $\boxed{(\sqrt{x})^2 = x \quad \sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y} \quad \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$

pour x un réel quelconque : $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

fonction exponentielle

définition :
la fonction $\boxed{\exp}$ est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\boxed{(\exp)' = \exp \text{ et } \exp(0) = 1}$
on peut noter $\boxed{\exp(x) = e^x}$ où $\boxed{e = \exp(1)}$.

propriétés : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\boxed{e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \quad e^{nx} = (e^x)^n}$

fonction logarithme népérien

définition : Soit x un réel **strictement positif** : $\boxed{y = \ln(x)}$ est l'unique réel tel que $\boxed{e^y = x}$

propriétés :
$\boxed{\text{pour } x > 0 \text{ , } e^{\ln(x)} = x}$ et $\boxed{\text{pour } x \text{ réel quelconque , } \ln(e^x) = x}$
$\boxed{\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1}$

pour $x, y > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \ln(x^n) = n\ln(x)}$$

QCM

Pour chaque expression, une seule égalité est correcte.
a, b, x, C représentent des réels, n et k représentent des entiers.

1. $a^5a^3 =$ (A). a^{5^3} (B). a^{15} (C). a^8

2. $a^2b^3 =$ (A). $(ab)^2b$ (B). $(ab)^5$ (C). $(ab)^6$

3. $(a^2)^n =$ (A). a^{2n} (B). a^{2+n} (C). a^{2^n}

4. $\left(3^n\right)^2 =$ (A). 3^{n^2} (B). 6^n (C). 9^n

5. $\left(a^{n^2}\right)^3 =$ (A) a^{3n^2} (B) a^{n^8} (C) a^{n^6}

6. $\dfrac{a^{n^2}}{a^n} =$ (A) a^n (B) a^{n^2-n} (C) a^{2n}

7. $a^{3n}(a^n)^2 =$ (A) a^{5n} (B) a^{6n} (C) a^{3n^3}

8. $2^{-2k} \times 3^k =$ (A). $\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ (B). $\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ (C). $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}$

9. $3^{2k+1} \times 2^{-k} =$ (A). $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^{-k}$ (B). $9\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ (C). $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^k$

10. $2(2\times 3^n - 3\times 2^n) =$ (A). $(4\times 12^n - 6\times 4^n)$ (B). $(4\times 3^n - 3\times 4^n)$ (C). $(4\times 3^n - 3\times 2^{n+1})$

11. $2^n + 2^n =$ (A). 4^n (B). 2^{n+1} (C). 2^{2n}

12. $(-1)^{n+2} =$ (A). $(-1)^{n+1}$ (B). $-(-1)^n$ (C). $(-1)^n$

13. $\dfrac{1}{(-1)^n} =$ (A). $(-1)^{n+1}$ (B). $-(-1)^n$ (C). $(-1)^n$

14. $(-1)^{n+1} + (-1)^n =$ (A). 0 (B). 1 (C). 2

15. $(-2)^{2n+1} =$ (A). 2^{2n+1} (B). $(-4)^{n+1}$ (C). -2×4^n

16. $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}} =$ (A). $\sqrt{a}$ (B). $a\sqrt{a}$ c. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

17. $\dfrac{\sqrt{a^2+3a^2}}{\sqrt{2a}} =$ (A). $2\sqrt{a}$ (B). $\sqrt{2a}$ c. $\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

18. $2 \times \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$ (A). 2^n (B). 2^{n+1} (C). $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

19. $e^{(x+\frac{1}{x})} =$ (A). $e^x + e^{\frac{1}{x}}$ (B). $e^x \times e^{\frac{1}{x}}$ (C). $e^x + e^{-x}$

20. $\dfrac{e^x}{e^{-y}} =$ (A). $e^x - e^y$ (B). e^{x-y} (C). e^{x+y}

21. $Ce^{-\ln x} =$ (A). Cx (B). $-Cx$ (C). $\dfrac{C}{x}$

22. $1 - e^{-x} =$ (A). $\dfrac{e^x-1}{e^{-x}}$ (B). $\dfrac{e^x+1}{e^{-x}}$ (C). $\dfrac{e^x-1}{e^x}$

23. $\dfrac{1}{e^{-x}-1} =$ (A). $\dfrac{e^x}{e^x-1}$ (B). $e^x - 1$ (C). $\dfrac{e^x}{1-e^x}$

24. $\ln(xy^2) + \ln(x) =$ (A). $2\ln(xy)$ (B). $2x\ln(y)$ (C). $\ln(x)(y^2+1)$

25. $\ln(x^2-1) =$ (A). $2\ln(x) - 1$ (B). $\ln(x-1) + \ln(x+1)$ (C). $\ln(x-1) - \ln(x+1)$

26. $-3\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ (A). $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (B). $\ln 8$ (C). $\ln 6$

27. $n\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) =$ (A). $\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ (B). $\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-n}\right)$ (C). $\dfrac{1}{\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}$

28. $\ln(x+x^2) =$ (A). $\ln(x) + \ln(x^2)$ (B). $\ln(x) + \ln(1+x)$ (C). $\ln(x) \times \ln(1+x)$

29. $\ln(1+\dfrac{1}{n}) =$ (A). $\ln(n+1) - \ln(n)$ (B). $\ln(n+1) + \ln(n)$ (C). $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

30. $\ln(1+e^x) =$ (A) $x + \ln(e^{-x}+1)$ (B) $-\ln(e^{-x}+1)$ (C) $1 + \ln(e^{-x}+1)$

Réponses

1. C
2. A
3. A
4. C
5. A
6. B
7. A
8. A
9. C
10. C
11. B
12. C
13. C
14. A
15. C
16. B
17. B
18. C
19. B
20. C
21. C
22. C
23. C
24. A
25. B
26. B
27. B
28. B
29. A
30. A

opérations sur les fractions

a, b, c, d, k représentent des réels non nuls.

multiplier 2 fractions : $\boxed{\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}}$

simplifier une fraction : $\boxed{\dfrac{ka}{kb} = \dfrac{\cancel{k} \times a}{\cancel{k} \times b} = \dfrac{a}{b}}$

inverse d'une fraction : $\boxed{\dfrac{1}{\frac{c}{d}} = \dfrac{d}{c}}$

diviser 2 fractions : $\boxed{\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c}}$

ajouter 2 fractions qui ont **le même dénominateur** : $\boxed{\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{d}}$

attention : $\dfrac{a}{d} - \dfrac{b+c}{d} = \dfrac{a-(b+c)}{d} = \dfrac{a-b-c}{d}$

second degré

$a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. $\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c}$ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ a 2 solutions réelles : $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Pour tout x réel , $\boxed{P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)}$ et $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ a une solution réelle : $\boxed{x_0 = \dfrac{-b}{2a}}$

Pour tout x réel , $\boxed{P(x) = a(x-x_0)^2}$ et $P(x)$ est du signe de a sauf pour $x = x_0$ où $P(x_0) = 0$.

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ a 2 solutions complexes conjuguées :

$\boxed{z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$ Pour tout x réel, $P(x)$ est du signe de a.

identités remarquables

a, b représentent des nombres réels ou complexes.

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

◇ **Exercice 1** : QCM

Pour chaque expression, une seule égalité est correcte. a, b, x, t représentent des réels.

1. $\dfrac{4x^2}{\dfrac{2}{x^2}} =$ (A) $2x^4$ (B) 2 (C) 8
2. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x+1}{x} =$ (A) $-\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)$ (B) $\dfrac{x-2}{2x}$ (C) $\dfrac{-x+2}{2x}$
3. $\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{2}{x} =$ (A) $\dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)}$ (B) $\dfrac{-2x-1}{x(x+1)}$ (C) $\dfrac{-2x+3}{x(x+1)}$
4. $\dfrac{1-x^2}{(x-1)^4} =$ (A) $-\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ (B) $\dfrac{1+x}{(x-1)^3}$ (C) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$
5. $\dfrac{e^t}{1+e^t} - 1 =$ (A) $\dfrac{-1}{1+e^t}$ (B) $\dfrac{2e^t-1}{1+e^t}$ (C) $\dfrac{e^t-1}{1+e^t}$
6. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} =$ (A) $a+b$ (B) $\dfrac{1}{a+b}$ (C) $\dfrac{ab}{a+b}$
7. $2 - \dfrac{2x+1}{x+2} =$ (A) $\dfrac{3}{x+2}$ (B) $\dfrac{5}{x+2}$ (C) $\dfrac{4x+3}{x+2}$
8. $2 - \dfrac{(x+1)^2}{x} =$ (A) $\dfrac{-x^2+1}{x}$ (B) $\dfrac{-x^2-1}{x}$ (C) $-\dfrac{x^2-1}{x}$
9. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} =$ (A) $\dfrac{2}{(x-1)}$ (B) $\dfrac{2}{x^2-1}$ (C) $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$
10. $\dfrac{1}{(x^2-1)} - \dfrac{1}{x-1} =$ (A) $\dfrac{x-2}{x^2-1}$ (B) $\dfrac{x}{x^2-1}$ (C) $\dfrac{-x}{x^2-1}$
11. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$ (A) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$
12. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} =$ (A) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}+1}$ (B) $\sqrt{2}+1$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$
13. $(1-x^2)(1-x) =$ (A) $(1-x)^2(1+x)$ (B) $(1-x)(1+x)^2$ (C) $1-x^3$
14. $2x^2-5x-3 =$ (A) $(2x+1)(x-3)$ (B) $(2x-1)(x+3)$ (C) $(x+\dfrac{1}{2})(x-3)$
15. $5-2(x-1)^2 =$ (A) $-2x^2+4x+7$ (B) $-2x^2+4x+3$ (C) $-2x^2-4x+7$
16. $3(x+2)^2-8 =$ (A) $3x^2+4x-4$ (B) $3x^2+12x+4$ (C) $3x^2+6x+4$
17. $(3x-2)^2-(3x-2)(x-1) =$ (A) $(3x-2)(2x-1)$ (B) $(3x-2)(2x-3)$ (C) $(3x-2)(2-x)$

$\diamondsuit$ **Exercice 2** : Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
2. $x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$
4. $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$
5. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
6. $x^4 + x^2 - 1 = 0$
7. $x^3 - x^2 - 2x = 0$
8. $6e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$
9. $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$
10. $x + \sqrt{x} - 1 = 0$
11. $x + \dfrac{1}{x} = 3$
12. $e^x + 2e^{-x} = 3$

$\diamondsuit$ **Exercice 3** : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^2 + 3x - 2 > 0$
2. $x^2 - x - 1 \leqslant 0$
3. $x^2 + x + 1 > 0$
4. $x^2 - 6x + 9 \leqslant 0$
5. $4x^2 + 4x + 1 < 0$
6. $x^2 + \sqrt{2}x + 1 < 0$
7. $x - 2\sqrt{x} + 1 > 0$
8. $6e^{2x} - 5e^x + 1 \leqslant 0$
9. $e^x + 2e^{-x} > 3$
10. $(3x - 2)(2x - 1) > 0$
11. $(3x - 2)(2x - 3) \leqslant 0$
12. $(3x - 2)(2 - x) \geqslant 0$

RÉPONSES

$\diamondsuit$ **Exercice 1** :

1. A ; 2. A ; 3. B ; 4. C ; 5. A ; 6. C ; 7. A ; 8. B ;
9. B ; 10. C ; 11. B ; 12. B ; 13. A ; 14. A ; 15. B ; 16. B ; 17. A

$\diamondsuit$ **Exercice 2** :

1. $S = \left\{-2, \dfrac{1}{2}\right\}$

2. $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. $S = \left\{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

4. $S = \left\{\dfrac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right\}$

5. $S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

6. $S = \left\{\pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, \pm i\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}\right\}$

7. $S = \{0, -1, 2\}$

8. $S = \{-\ln(2), -\ln(3)\}$

9. $S = \{1\}$

10. $S = \left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}$

11. $S = \left\{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

12. $S = \{\ln(2), 0\}$

$\diamondsuit$ **Exercice 3** :

1. $]-\infty, -2[\cup]\dfrac{1}{2}, +\infty[$
2. $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
3. $\mathbb{R}$
4. $\{3\}$
5. $\emptyset$
6. $\emptyset$
7. $[0, 1[\cup]1, +\infty[$
8. $[-\ln(3), -\ln(2)]$
9. $]-\infty, 0[\cup]\ln(2), +\infty[$
10. $]-\infty, \dfrac{1}{2}[\cup]\dfrac{2}{3}, +\infty[$
11. $\left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}\right]$
12. $\left[\dfrac{2}{3}, 2\right]$

inégalités

autorisé :

ajouter une constante k : $\boxed{\text{si } x \leqslant y \text{ alors } x+k \leqslant y+k}$

ajouter terme à terme : $\boxed{\text{si } x \leqslant y \text{ et } x' \leqslant y' \text{ alors } x+x' \leqslant y+y'}$

multiplier par une constante $\boxed{k>0}$: $\boxed{\text{si } x \leqslant y \text{ alors } kx \leqslant ky}$

multiplier par une constante $\boxed{k<0}$: $\boxed{\text{si } x \leqslant y \text{ alors } kx \geqslant ky}$

multiplier terme à terme si tout est positif : $\boxed{\text{si } 0<x \leqslant y \text{ et } 0<x' \leqslant y' \text{ alors } 0<xx' \leqslant yy'}$

passer à l'inverse si tout est positif : $\boxed{\text{si } 0<x \leqslant y \text{ alors } 0<\dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}}$

astuce : $\boxed{a \leqslant b \text{ ssi } b-a \geqslant 0}$ (étude de signe)

interdit : soustraire terme à terme , diviser terme à terme

puissances et inégalités :

• pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ fixé et $0<x<y$:
→ si $\alpha>0$ alors $0<x^\alpha<y^\alpha$
→ si $\alpha<0$ alors $0<y^\alpha<x^\alpha$ (une puissance négative est un inverse)

• pour $x>0$ fixé :
→ si $x>1$ alors $\boxed{x<x^2<x^3}$
→ si $x \in]0,1[$ alors $\boxed{x^3<x^2<x}$

égalités

exponentielle : $\boxed{e^x=e^y \text{ ssi } x=y}$

logarithme : pour x et $y>0$, $\boxed{\ln(x)=\ln(y) \text{ ssi } x=y}$

puissances : attention à la parité $\boxed{x^2=y^2 \text{ ssi } x=y \text{ ou } x=-y}$ mais $\boxed{x^3=y^3 \text{ ssi } x=y}$

valeur absolue : $\boxed{|x|=|y| \text{ ssi } x=y \text{ ou } x=-y}$

rappel : un produit est nul ssi au moins l'un des facteurs est nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
attention : on prendra soin de déterminer le domaine de validité avant de se lancer dans la résolution.

1. $x(x+2) = 2x(3x-4)$
2. $(2x^2+x+2) = (2x^2+3x-3)$
3. $|2x^2+x+2| = |2x^2+3x-3|$
4. $(2x^2+x+2)^2 = (2x^2+3x-3)^2$
5. $8x+1 \geqslant 2x-5$
6. $(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2)$
7. $x^2 \leqslant 4$
8. $x^3 \geqslant 8$
9. $1-x^4 \geqslant 0$
10. $x - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$
11. $\dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{x^2+1}{x-1} \geqslant 5$
13. $\dfrac{1}{x} < -2$
14. $\dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{x-2}{x-1}$
15. $\dfrac{x+3}{x+2} \geqslant \dfrac{x-2}{x-1}$
16. $|\ln(x)| < 1$
17. $e^{x-1} = \dfrac{1}{2}$
18. $\ln(x^2-4e^2) = 1 + \ln(3x)$
19. $\ln(1+e^{-x}) = x$
20. pour n entier naturel : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-2}$

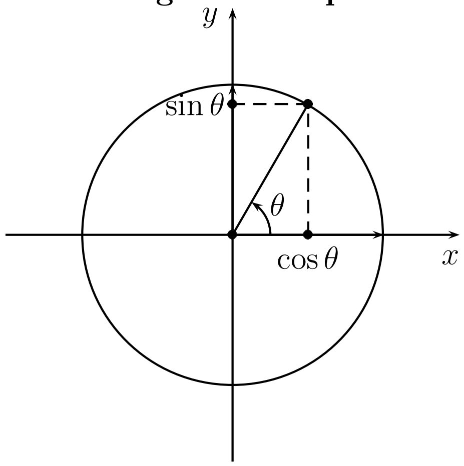
1. se ramener à « $\cdots = 0$ » , factoriser le terme de gauche et utiliser le dernier rappel.
2. se ramener à « $\cdots = 0$ » et ça devient très facile.
3. utiliser le rappel sur la valeur absolue.
4. utiliser le rappel sur les puissances.
5. facile.
6. se ramener à « $\cdots > 0$ » , factoriser le terme de gauche et faire un tableau de signe.
7. on peut utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^2$
8. on peut utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^3$
9. se ramener à « $x^4 \leqslant ...$ » et utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^4$
10. mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.
11. se ramener à « $... \leqslant 0$ » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.
12. se ramener à « $... \geqslant 0$ » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.
13. se ramener à « $... < 0$ » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.
14. on peut faire un « produit en croix ».
15. on ne peut pas faire un « produit en croix »! Donc se ramener à « $... \geqslant 0$ » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.
16. encadrer $\ln(x)$.
17. utiliser la fonction ln.
18. utiliser la fonction exp... et attention au domaine!
19. utiliser la fonction exp.
20. Utiliser la fonction ln et ses différentes propriétés. Attention à la division par un nombre négatif!

RÉPONSES

1. $S = \{0, 2\}$
2. $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$
3. $S = \left\{\dfrac{5}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right\}$
4. $S = \left\{\dfrac{5}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}\right\}$
5. $S = [-1, +\infty[$
6. $S = \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[\cup]3, +\infty[$
7. $S = [-2, 2]$
8. $S = [2, +\infty[$
9. $S = [-1, 1]$
10. $S = [-1, 0[\cup [1, +\infty[$
11. $S =]0, 2[$
12. $S =]1, 2] \cup [3, +\infty[$
13. $S = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[$
14. $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
15. $S = \left]-2, -\dfrac{1}{2}\right] \cup]1, +\infty[$
16. $S =]e^{-1}, e[$
17. $S = \{1 - \ln(2)\}$
18. $S = \{4e\}$
19. $S = \left\{\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$
20. $n \geqslant -\dfrac{2\ln(10)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

Trigonométrie :

Cercle trigonométrique :



Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pythagore : $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

périodicité : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$

parité : $\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}$ et $\boxed{\sin(-\theta) = -\sin(\theta)}$

Formules d'addition : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$

Nombres complexes :

• rappel : $i^2 = -1$

• La **forme algébrique** d'un nombre complexe est $\boxed{z = a + ib}$ $a = Re(z)$ et $b = Im(z) \in \mathbb{R}$.

• Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\boxed{\overline{z} = a - ib}$

• Le **module** de $z = a + ib$ est $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}}$

• La **forme trigonométrique** d'un complexe z non nul est $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ où r est un réel strictement positif (r est alors le **module** de z) et θ est un réel (appelé un **argument** de z).

• En notant $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ on obtient la **forme exponentielle** $\boxed{z = re^{i\theta}}$ avec $r > 0$.

à retenir : $\boxed{e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$ $\boxed{\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$

QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte (sauf pour une question, à vous de trouver laquelle !)

1. Résoudre $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$:

   (A). $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right\}$ (B). $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ (C). $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

2. Résoudre $\sin(x) = \sqrt{3}$ sur $[0, 2\pi]$:

   (A). $\left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ (B). $\emptyset$ (C). $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

3. Résoudre $\cos(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$:

   (A). $\left\{\dfrac{\pi}{2}, \pi\right\}$ (B). $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ (C). $\left\{-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right\}$

4. Résoudre $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$:

   (A). $\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$ (B). $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right\}$ (C). $\left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

5. Résoudre $\cos(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$:

   (A). $\left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$ (B). $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{6}, \pi\right]$ (C). $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$

6. Résoudre $\sin(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$:

   (A). $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ (B). $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$ (C). $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$

7. $\cos(a - b) =$

   (A). $-\cos a \cos b - \sin a \sin b$ (B). $\cos a \cos b + \sin a \sin b$ (C). $\cos a \sin b - \sin a \cos b$

8. $\sin(a - b) =$

   (A). $\sin b \cos a - \sin a \cos b$ (B). $\sin a - \sin b$ (C). $\sin a \cos b - \cos a \sin b$

9. $\sin(2a) =$ (A). $2 \sin a$ (B). $(\sin a)^2$ (C). $2 \sin a \cos a$

10. $\cos(2a) =$ (A). $\cos^2 a - \sin^2 a$ (B). $2\cos^2 a - 1$ (C). $1 - 2\sin^2 a$

11. $\dfrac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x =$ (A). $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (B). $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ (C). $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

12. $(4 - 4i) \times (-1 + i\sqrt{3})$ a pour forme algébrique :

(A). $4(\sqrt{3} - 1) + 4(1 + \sqrt{3})i$ (B). $-4(\sqrt{3} + 1) + 4(1 + \sqrt{3})i$ (C). $-4 - 4\sqrt{3}i$

13. $\dfrac{4 - 4i}{-1 + i\sqrt{3}}$ a pour forme algébrique :

(A). $-(\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i$ (B). $8 + 0i$ (C). $-(-\sqrt{3} + 1) + (1 - \sqrt{3})i$

14. $z = 4 - 4i$ a pour module : (A). 4 (B). $4\sqrt{2}$ (C). 8

15. $z = -1 + i\sqrt{3}$ a pour argument : (A). $-\dfrac{\pi}{3}$ (B). $\dfrac{5\pi}{6}$ (C). $\dfrac{2\pi}{3}$

16. $z = -1 + i\sqrt{3}$ a-t-il pour forme trigonométrique $-2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$?

(A). oui (B). non (C). Cela dépend du signe de z

17. $\dfrac{4 - 4i}{-1 + i\sqrt{3}} =$

(A). $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ (B). $2\sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$ (C). $4(1 - \sqrt{3})(-1 + i)$

18. $\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} =$ (A). $\cos\theta$ (B). $\sin\theta$ (C). 1

19. $\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} =$ (A). $\cos\theta$ (B). $\sin\theta$ (C). 1

20. $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 =$

(A). $\cos^4\theta + i\sin^4\theta$ (B). $\cos(4\theta) + i\sin(4\theta)$ (C). $4\cos\theta\sin\theta$

1. C
2. B
3. C
4. B
5. B
6. A
7. B
8. C
9. C
10. A et B et C
11. C
12. A
13. A
14. B
15. C
16. B
17. B
18. A
19. B
20. B

Suites arithmétiques	**Suites géométriques**
Définition. •(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. •(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante.	**Définition.** •(u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$. • Si la suite (u_n) ne s'annule pas, elle est géométrique si et seulement si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est constante.
Expression de u_n en fonction de n. • Si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 + nr.$$ • Les suites arithmétiques sont les suites de la forme $(an + b)$ où a et b sont deux réels (ou deux complexes). • Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p + (n - p)r.$$	**Expression de u_n en fonction de n.** • Si la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 q^n.$$ • Les suites géométriques sont les suites de la forme (ab^n) où a et b sont deux réels (ou deux complexes). • Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p q^{n-p}.$$
Somme arithmétique. Pour tout entier naturel non nul n, $$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$	**Somme géométrique.** Pour tout entier naturel non nul n, $$1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de terme initial $u_0 = 2$, alors $u_{10} =$

   (A). 42 (B). 24 (C). 12

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$. Si $u_1 = 5$, alors $u_8 =$

   (A). -11 (B). -9 (C). 19

3. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_7 = 79$ et $u_8 = 82$. Alors sa raison $r =$

   (A). 3 (B). $1,5$ (C). $81,5$

4. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_{10} = 4$ et $u_{35} = 54$. Alors sa raison $r =$

   (A). 50 (B). 2 (C). 25

5. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de terme initial $u_0 = \frac{1}{8}$, alors $u_{10} =$

   (A). 1024 (B). 128 (C). $20,125$

6. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ avec $u_1 = 4$, alors sa raison $q =$

   (A). 2 (B). 8 (C). $3,5$

7. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ avec $u_2 = 9$, alors sa raison $q =$

   (A). 9 (B). 3 (C). 3 ou -3

8. (u_n) est une suite géométrique de terme initial $u_0 = 0,5$ et de raison $q = 2$,
   alors $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} =$

   (A). $1023,5$ (B). $511,5$ (C). $2818,75$

9. (u_n) est une suite géométrique avec $u_1 = 128$ et de raison $q = 0,5$,
   alors $u_1 + u_2 + ... + u_{10} =$

   (A). $255,875$ (B). $704,6875$ (C). $255,75$

10. $1 + 11 + 21 + 31 + ... + 1001 =$

(A). 50100 (B). 50601 (C). 1065

11. $1 - 10 + 100 - 1000 + ... + 100000000 =$

(A). 111111111 (B). -9090909 (C). 90909091

12. Que vaut la somme des 8 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2 ?

(A). 255 (B). 500 (C). 510

13. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison 3. Alors $u_n =$
(A). 6×3^n (B). 2×3^n (C). $2 \times 3^{n-1}$

14. On pose $u_n = 3 - 2n$. Ce terme correspond à une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

15. On pose $u_n = 3 - n^2$. Ce terme correspond à une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

16. On pose $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ce terme correspond à une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

17. On pose $u_n = \frac{3}{2^{n+1}}$. Ce terme correspond à une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

18. On pose $u_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$. Ce terme correspond à une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

19. (u_n) est une suite géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$,
alors $u_2 + u_3 + ... + u_{10} =$

(A). 1023 (B). 2047 (C). 2044

20. (u_n) est une suite géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$,
alors $u_2 + u_3 + ... + u_{10} =$

(A). $2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$ (B). $\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9\right)$ (C). $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

RÉPONSES

1. A
2. B
3. A
4. B
5. B
6. B
7. C
8. A
9. C
10. B
11. C
12. C
13. B
14. A
15. C
16. B
17. B
18. A
19. C
20. B

dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$	$h(x) = f(u(x))$	$h'(x)$	remarques
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	pour $u(x) > 0$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	pour $u(x) \neq 0$
x^n	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$(u(x))^n$	$nu'(x)(u(x))^{n-1}$	pour $u(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	pour $u(x) > 0$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$			
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$			

opérations : $(u+v)' = u' + v'$ $\quad (\lambda u)' = \lambda u'$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

primitive et intégrale

pour une fonction f continue sur un intervalle I :

- F est une **primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $\boxed{F' = f}$.
- pour a et $b \in I$: $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

♢ **Exercice 1** : Calculer lorsque c'est possible $f'(x)$ (on donnera une expression factorisée) :

1. $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$
2. $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 2}$
4. $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$
5. $f(x) = x^2 e^x$
6. $f(x) = x e^{\sqrt{x}}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
8. $f(x) = \sin^3 x$
9. $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$
10. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

♢ **Exercice 2** : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^2 (x^3 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x \qquad I_2 = \int_0^1 e^{-3x}\ \mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^1 x e^{x^2}\ \mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^1 x^2(x^3 + 1)\ \mathrm{d}x$$

$$I_5 = \int_1^3 \frac{\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin^5 x\ \mathrm{d}x$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{1}{(2x + 1)^2}\ \mathrm{d}x \qquad I_8 = \int_0^2 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\ \mathrm{d}x$$

$$I_9 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\ \mathrm{d}x \qquad I_{10} = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{1 + e^x}\ \mathrm{d}x$$

◊ **Exercice 1** :
reconnaître...

1. $\sqrt{u(x)}$
2. (uv)
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)$
4. $\ln(u(x))$
5. (uv)
6. $e^{u(x)}$
7. $\dfrac{1}{u(x)}$
8. $(u(x))^n$
9. $\left(\dfrac{u}{v}\right)$
10. $\ln(u(x))$.

◊ **Exercice 2** :

1. quelle est la primitive de $x \longmapsto x^n$?
2. retrouver $u'(x)e^{u(x)}$
3. retrouver $u'(x)e^{u(x)}$
4. reconnaître $nu'(x)(u(x))^{n-1}$
5. reconnaître $nu'(x)(u(x))^{n-1}$... mais c'est plus difficile.
6. encore $nu'(x)(u(x))^{n-1}$
7. reconnaître $-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
8. reconnaître $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
9. reconnaître $-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$
10. reconnaître $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

♢ **Exercice 1** :

1. sur $]-2,2[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$
2. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$
3. sur $]0,2[\cup]2,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$
4. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
5. sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = x(2+x)e^x$
6. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{\sqrt{x}}$
7. sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
8. sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3\cos x \sin^2 x$
9. sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$
10. sur $]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)(1-x)}$

♢ **Exercice 2** :

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + x\right]_0^2 = 2$$

$$I_2 = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-3}}{3}$$

$$I_3 = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$I_4 = \left[\frac{1}{6}(x^3+1)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^3 = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{6}\sin^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$I_7 = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x+1}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$I_8 = [\ln(x^2-x+1)]_0^2 = \ln 3$$

$$I_9 = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{10} = [\ln(1+e^x)]_{-1}^1 = 1$$

suites usuelles :

si α est un entier > 0 , $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty$ si α est un entier < 0 , $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha = 0$

si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

fonctions usuelles :

• **exponentielle :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

• **logarithme :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

• **sinus :** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

opérations sur les limites :

Pour 2 suites (u_n) et (v_n) :

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n + v_n)$	$\lim(\lambda u_n)$	$\lim(u_n v_n)$	$\lim(1/u_n)$
$\ell = 0$	ℓ'	ℓ'	0	0	$-\infty$ si $\ell = 0^-$ $+\infty$ si $\ell = 0^+$
$\ell \neq 0$	ℓ'	$\ell + \ell'$	$\lambda\ell$	$\ell\ell'$	$1/\ell$
$\pm\infty$	$\ell' = 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $\lambda \neq 0$	forme indéterminée	0
$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$ si $\lambda \neq 0$	$\pm\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$ si $\lambda \neq 0$	$+\infty$	0^+
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ si $\lambda \neq 0$	$+\infty$	0^-
$-\infty$	$+\infty$	forme indéterminée	$\pm\infty$ si $\lambda \neq 0$	$-\infty$	0^-

Ces résultats peuvent s'appliquer pour la limite en x_0 de 2 **fonctions** f et g définies sur le même domaine, x_0 représentant soit un réel soit $\pm\infty$.

composition : $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{t\to a} g(t) = x_0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to a} f(g(t)) = \ell}$

x_0, a, ℓ représentent des réels ou $\pm\infty$.

$\diamondsuit$ **Exercice 1** : Calculer la limite (quand n tend vers $+\infty$) de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln(1 + e^{-n})$
2. $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{2n^2 - 1}$
3. $u_n = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
4. $u_n = 3^n - 2^n$
5. $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\diamondsuit$ **Exercice 2** : Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\cos x)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \ln x}{(x^2 - 1)}$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - e^x$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$
10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\diamondsuit$ **Exercice 1** :

1. utiliser la limite de l'exponentielle en $-\infty$.
2. mettre en facteur n^2 au numérateur et au dénominateur.
3. utiliser $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.
4. factoriser par 3^n pour retrouver le résultat précédent.
5. utiliser $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.
6. multiplier par $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ au numérateur et au dénominateur et utiliser une identité remarquable.

$\diamondsuit$ **Exercice 2** :

1. $\cos(0) =?$
2. mettre en facteur x au numérateur et au dénominateur dans ln.
3. utiliser $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{2x} =?$
5. utiliser $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
6. facile...
7. mettre en facteur e^x.
8. composition des limites...
9. là aussi.
10. mettre en facteur x^2 sous la racine et le sortir avec précaution...
11. même chose mais avec plus de précautions. Au fait : $\sqrt{x^2} =?$

◊ **Exercice 1** :

1. 0
2. $\dfrac{3}{2}$
3. 1
4. $+\infty$
5. 1
6. 0

◊ **Exercice 2** :

1. 0
2. $\ln(2)$
3. 1
4. 2
5. 0
6. 0
7. $+\infty$
8. 1
9. $+\infty$
10. 1
11. -1

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

produit scalaire et distances

• **définition du produit scalaire** de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$: $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$

• $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont **orthogonaux** ssi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ c'est-à-dire $\boxed{xx' + yy' = 0}$

• **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$: $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$

• **distance** entre 2 points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$: $\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

• équation du **cercle** de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R : $\boxed{\Omega M = R}$ donne $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$

droites dans le plan

• **équation cartésienne** d'une droite D dans le plan : $\boxed{ax + by + c = 0}$
pour une droite non verticale ($b \neq 0$), on peut écrire $\boxed{y = px + q}$,
où $p = -\dfrac{a}{b}$ est la **pente** (ou **coefficient directeur**) et q **l'ordonnée à l'origine**.

• pour une droite D d'équation $\boxed{ax + by + c = 0}$:
vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$, **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}(-b, a)$

• pour une droite D d'équation $\boxed{y = px + q}$: **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}(1, p)$

• pour obtenir une équation de la droite D :

1. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A)\text{, de vecteur normal } \overrightarrow{n}(a, b)}$:
   on obtient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ en développant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

2. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A)\text{, de vecteur directeur } \overrightarrow{u}(\alpha, \beta)}$:
   (a) on obtient un vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$ avec $\alpha a + \beta b = 0$ et on se ramène au cas précédent.
   (b) on calcule $p = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et on obtient q en remplaçant x et y par x_A et y_A dans $y = px + q$.
   (c) on développe $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = p = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

3. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A) \text{ et } B(x_B, y_B)}$:
   (a) on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et on se ramène à l'une des méthodes précédentes.
   (b) on développe $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$\diamondsuit$ **Exercice 1** :
Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 1.

$\diamondsuit$ **Exercice 2** :
Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$

$\diamondsuit$ **Exercice 3** :
On considère la droite D d'équation : $y = \dfrac{3}{2}x + 1$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

$\diamondsuit$ **Exercice 4** :
On considère la droite D d'équation : $5x + 2y + 3 = 0$.

1. Déterminer un vecteur normal de D.
2. Déterminer un vecteur directeur de D.

$\diamondsuit$ **Exercice 5** :
On considère la droite D d'équation : $x = 5$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

$\diamondsuit$ **Exercice 6** :
On considère la droite D d'équation : $y = 5$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

$\diamondsuit$ **Exercice 7** :
On considère les points $A(3,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,3)$.

1. On note D_1 la droite passant par A et B.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de D_1.
   (b) Déterminer un vecteur normal de D_1.
   (c) En déduire une équation de D_1 de la forme : $ax + by + c = 0$.
2. On note D_2 la droite passant par A et C.
   (a) Déterminer la pente p de D_2.
   (b) En déduire une équation de D_2 de la forme : $y = px + q$

$\diamondsuit$ **Exercice 8** :
On considère les points $A(1,3)$, $B(2,5)$, $C(-1,4)$.

1. Déterminer l'équation de la droite (AB).
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et isocèle.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[BC]$.
4. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[BC]$.
5. Donner une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

$\diamondsuit$ **Exercice 1** :
Utiliser la formule donnée en rappel.

$\diamondsuit$ **Exercice 2** :
$x^2 - 2x = (x - \dots)^2 - \dots$

$y^2 - 10y = (y - \dots)^2 - \dots$

L'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ peut s'écrire : $(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 = \dots$.

$\diamondsuit$ **Exercice 3** :
$\diamondsuit$ **Exercice 4** :
Utiliser les rappels.

$\diamondsuit$ **Exercice 5** :
$\diamondsuit$ **Exercice 6** :
Un dessin peut aider.

$\diamondsuit$ **Exercice 7** :
Utiliser les rappels.

$\diamondsuit$ **Exercice 8** :

1. Utiliser la méthode de votre choix.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.
3. $x_I = \dfrac{x_C + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_C + y_B}{2}$.
4. La médiatrice du segment $[BC]$ est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{BC}$.
5. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse.

♢ **Exercice 1** : $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 4 = 0$

♢ **Exercice 2** : Il s'agit du cercle de centre $\Omega(1,5)$ et de rayon $R = 3$.

♢ **Exercice 3** :

1. vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(1, \frac{3}{2})$ car $p = \frac{3}{2}$.
2. vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(-\frac{3}{2}, 1)$ ou aussi $\overrightarrow{n}(-3,2)$, avec $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$

♢ **Exercice 4** : vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(5,2)$, vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(-2,5)$ avec $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$

♢ **Exercice 5** : vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(0,1)$, vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(1,0)$.

♢ **Exercice 6** : vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(1,0)$, vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(0,1)$.

♢ **Exercice 7** :

1. (a) vecteur directeur de D_1 : $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB}(-4,-2)$
   (b) vecteur normal de D_1 : $\overrightarrow{n_1}(2,-4)$, avec $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_1} = 0$
   (c) En développant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_1} = 0$ c'est-à-dire : $(x-3) \times 2 + (y-1) \times (-4) = 0$,
   on obtient : $x - 2y - 1 = 0$.
2. (a) $p = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -1$.
   (b) une équation de D_2 est de la forme : $y = -x + q$.
   En remplaçant par les coordonnées de A, on obtient $3 = -1 + q$ d'où $q = 4$.
   D'où l'équation : $y = -x + 4$.

♢ **Exercice 8** :

1. En développant $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, on obtient $y = 2x + 1$.
2. $\overrightarrow{AB}(1,2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,1)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5} = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc le triangle ABC est rectangle en A et isocèle.
3. $x_I = \dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{9}{2}$.
4. En développant $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BC} = 0$ c'est-à-dire : $(x - \frac{1}{2}) \times (-3) + (y - \frac{9}{2}) \times (-1) = 0$,
   on obtient : $-3x - y + 6 = 0$.
5. Ce cercle a pour centre $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ et pour rayon $R = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$.
   En développant : $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2$, on obtient $x^2 - x + y^2 - 9y + 18 = 0$.