MATHÉMATIQUES NÉCESSAIRES À L'ENTRÉE EN CPGE ECS

En classe préparatoire, on a souvent besoin d'effectuer des manipulations mathématiques usuelles faisant appel aux notions abordées dans les classes de collège et lycée. Lorsqu'on les rencontre, ces manipulations doivent être menées sans hésitation et correctement.

Nous disposons de peu de temps pour les reprendre en début d'année, vous êtes donc encouragés à travailler ces manipulations en autonomie. Ce document rassemble un certain nombre d'entraînement, les plus délicats étant signalés par une étoile$^{(*)}$. Ils forment une bonne introduction aux mathématiques nécessaires à l'entrée en classe préparatoire ECS.

Table des matières

I EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

RAPPEL DES PRINCIPALES RÈGLES DE CALCUL

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tels que les quotients, logarithmes, racines et puissances étudiées existent

$x^a x^b = x^{a+b}$	$\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(xy)^a = x^a y^a$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$	$\left(\dfrac{x}{y}\right)^a = \dfrac{x^a}{y^a}$
$e^a e^b = e^{a+b}$	$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$	$(e^x)^a = e^{ax}$	$\dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$	$\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$	$\ln(x^a) = a\ln(x)$
$e^0 = 1$	$\ln(1) = 0$	$e^{\ln(x)} = x$	$\ln(e^x) = x$

EXERCICE 1. Réduire au même dénominateur, puis arranger le numérateur.

1) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

2) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

3) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

4) $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 - n\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5) $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

6) $\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}$

7)$^{(*)}$ $\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+2} + \dfrac{c}{(k+2)^2}$

8)$^{(*)}$ $\dfrac{x+1}{1-x} - \dfrac{x(x-1)-(x-2)(x+1)}{x+1}$

9)$^{(*)}$ $1 - \dfrac{1-q^n}{1-q} - \dfrac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}$

10) $a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c$

EXERCICE 2. Simplifier au possible les expressions algébriques suivantes.

1) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{(-1)^{n+1}}$

2) $\dfrac{(-3)^{n+1}}{9(-1)^n}$

3) $\dfrac{a-b}{b-a}$

4) $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$

5) $e^{(x+y)/2}\left(e^{(x-y)/2} + e^{(y-x)/2}\right)$

6) $\ln(1+a) + \ln(a) + \ln(1 + 1/a)$

7) $\ln(1-x^2) - \big(\ln(1-x) + \ln(1+x)\big)$

8) $\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)^2$

9)$^{(*)}$ $\ln\left(\dfrac{1}{n+1}\,\dfrac{A_{n+1}}{A_n}\right)$ où $A_n = n^n\sqrt{n}\,e^{-n}$

10)$^{(*)}$ $f(g(x))$ où $f(x) = \dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$ et $g(x) = \ln\big(\sqrt{x^2+1} - x\big)$

II FACTORISER

La factorisation est certainement la manipulation la plus importante, contrairement au développement. Devant une expression algébrique, il faut toujours se demander si l'on peut la factoriser.

Il existe deux méthodes principales pour factoriser :

- Utiliser la formule suivante : $\underline{a}\,b + \underline{a}\,c = \underline{a}\,(b+c)$.
  - ⋆ on repère le facteur commun $\underline{a}$
  - ⋆ on le place en facteur devant la parenthèse
  - ⋆ on place le reste de l'expression algébrique dans la parenthèse
- Utiliser les identités remarquables :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \end{cases}$$

La première identité remarquable $a^2 - b^2$ est fondamentale ; il faut la repérer rapidement lorsqu'elle apparaît dans une expression algébrique.

> <u>EXEMPLE</u> Factorisation de $4n^3 - n$:
>
> $$\begin{aligned} 4n^3 - n &= n\big(4n^2 - 1\big) && (n \text{ en facteur}) \\ &= n\big((2n)^2 - 1\big) && (\text{forme } a^2 - b^2) \\ &= n\big(2n-1\big)\big(2n+1\big) \end{aligned}$$

EXERCICE 3. Factoriser.

1) $a^2 - 4$
2) $(t-1)(t+2) - (t+3)(t-1)$
3) $16n^6 - n^2$
4) $8^n - 2^n$
5) $(a-1)(a-2) + (a-2)(a^2-a)$
6) $1 + \lambda + 1 - \lambda^2$
7) $-2p^2 + 2p(2p-1) + 2p(1-p)$
8) $(x+1)^2 + x^2 - 1$
9) $(x+3)^2 - (2x+1)^2$
10) $1 - 4p + 4p^2$
11) $\dfrac{1}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$
12) $a^7 + a^5$
13) $x^n + x^{n-1}$
14) $2^n b^2 - 2^{n+2} b + 2^{n+2}$
15) $(-1)^n a^2 + (-1)^{n-1}$
16) $1 - \dfrac{1}{n^2}$
17) $\dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$
18) $\dfrac{e^{x^2+x} - e^{x^2}}{e^x - e^{2x}}$
19)(*) $(a-1)^3 - (a^2-a)^2 + a(a-1)^2$
20) $\dfrac{t^4 - 1}{t^3 + t}$
21)(*) $a + b + ab + 1$
22) $(4k^2 + 4k + 1) - (j+1)^2$
23) $(X+1)^2 - 9X^2$
24) $x - 2\sqrt{xy} + y$

III MONTRER QUE $A = B$

Pour monter que deux expressions algébriques A et B sont égales, il existe 3 façons principales de procéder :

- Méthode directe : on part de A, on manipule, on arrive à B.
- Méthode directe : on part de B, on manipule, on arrive à A.
- Méthode d'une part, d'autre part : d'une part : on part de A, on manipule, on arrive à C,
d'autre part : on part de B, on manipule, on arrive au même C.

EXEMPLE

Q Démontrer que pour tout réel x non nul : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1$.

R Pour tout réel x non nul, on calcule d'une part : $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3=\left(x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3=x^2-1+\dfrac{1}{x^2}$.

Et d'autre part : $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1=\left(x^2-2+\dfrac{1}{x^2}\right)+1=x^2-1+\dfrac{1}{x^2}$.

On retrouve la même expression, donc $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+1$.

EXERCICE 4. Démontrer les égalités suivantes :

1) $1-\dfrac{1-t^3}{1-t}=-t(t+1)$

2) $1-x^4=(1-x)(1+x+x^2+x^3)$

3) $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$

4) $e^x+e^y=e^{(x+y)/2}\left(e^{(x-y)/2}+e^{(y-x)/2}\right)$

5)$^{(*)}$ $\dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$

6) $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*,\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}-1\right)$

7)$^{(*)}$ $\left(\dfrac{-b}{2}\right)^2-\dfrac{b^2}{2}+c=\dfrac{(2-b)(b+2c)-2b(1-c)}{4}$

8) $1+\left(\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(e^u+e^{-u}\right)^2$

9) $\dfrac{1}{1+t+t^2+t^3}-(1-t)=\dfrac{t^4}{(1+t)(1+t^2)}$

10)$^{(*)}$ $\dfrac{e^u+e^{-u}}{\left(1+\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2\right)^n}=\dfrac{4^n}{\left(e^u+e^{-u}\right)^{2n-1}}$

IV MONTRER QUE $A \leqslant B$

Pour démontrer une inégalité $A \leqslant B$ il existe une méthode efficace, en étudiant le signe de la différence :

- sans écrire de symbole $\leqslant$, on commencer par considérer la différence $A - B$,
- on manipule $A-B$ (factorisation, réduction au même dénominateur, simplification, ...) jusqu'à obtenir une expression sur laquelle on peut voir son signe,
- on justifie alors que $A - B \leqslant 0$, ce qui montre bien que $A \leqslant B$.

On peut remplacer $\leqslant$ par $\geqslant$. De plus, le fait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x sert souvent à étudier le signe.

EXEMPLE

Q Montrer que pour tout réel $t \in \,]-1\,,\,+\infty[$, on a $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 1 - t$.

R Pour tout $t \in \,]-1\,,\,+\infty[$, on considère la différence :

$$\frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{1-(1+t)(1-t)}{1+t} = \frac{1-(1-t^2)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$$

Or $t^2 \geqslant 0$ et puisque $t \in \,]-1\,,\,+\infty[$ on a aussi $1+t > 0$ donc par règle des signes : $\dfrac{t^2}{1+t} \geqslant 0$.

Donc on a bien $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 1 - t$ pour tout $t \in \,]-1\,,\,+\infty[$.

EXERCICE 5. Etablir les inégalités suivantes ; le symbole $\forall$ signifie « pour tout ».

1) $\forall t \in [0\,,\,1]\,,\ \dfrac{t^2}{1+t} \leqslant t^2$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)^2 \geqslant 4x$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 4(x-1)$

4) $\forall p \in [0\,,\,1]\,,\ p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$

5) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

6) $\forall t \in \,]-1\,,\,+\infty[\,,\ \dfrac{1}{1+t} \geqslant 1 - t + t^2 - t^3$

7)$^{(*)}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,,\ \dfrac{3n^2}{2(n^2-n+1)} \leqslant \dfrac{n^2}{2(n-1)}$

8) $\forall u \in \,]-\infty\,,\,1[\,,\ 1 + u \leqslant \dfrac{1}{1-u}$

9)$^{(*)}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leqslant n\,\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

10) $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall b \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

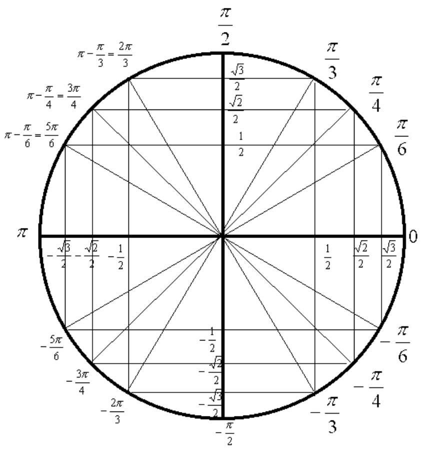
V ÉTUDIER DES FONCTIONS

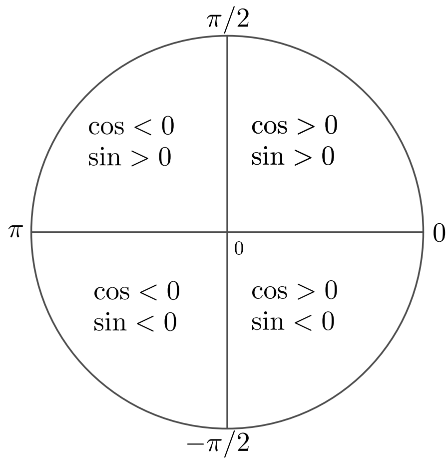
V.1) LIMITES ET TRIGONOMÉTRIE

Rappelons les limites des fonctions usuelles, utiles pour compléter les tableaux de variations :

Inverse	Quand $x \to 0$: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ Quand $x \to \infty$: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0^{(+)}$ et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0^{(-)}$
Exponentielle	$e^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$ et $e^x \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$
Exponentielle indéterminée	$xe^x \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0$ et $\frac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$
Logarithme	$\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$
Logarithme indéterminée	$x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$

En trigonométrie, il faut connaitre les valeurs du cosinus (sur l'axe des abscisses) et du sinus (sur l'axe des ordonnées) en les angles usuels 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π, et leurs symétriques. Il est aussi utile de savoir trouver le signe d'un cosinus et d'un sinus rapidement :





Il faut également connaître les principales formules trigonométriques, valable pour tous angles a et b :

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$	
$\cos(-a) = \cos(a)$	$\sin(-a) = -\sin(a)$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Nous reviendrons en ECS sur l'étude des limites et de la trigonométrie.

V.2) DÉRIVATION ET ÉTUDE

PLAN D'UNE ÉTUDE DE FONCTIONS

- On dérive la fonction sur le domaine d'étude.
- On étudie le signe de $f'(x)$:
  - → si le signe est immédiat, on le donne.
    (exemple : si $f(x) = x + x^3$, alors $f'(x) = 1 + 3x^2 \geqslant 0$ par règle des signes.)
  - → sinon, on factorise $f'(x)$ au mieux pour résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
- On dresse le tableau de variation sur le domaine d'étude.
- On calcule les valeurs/limites de $f(x)$ aux points particuliers du domaine.

Principales formules de dérivation.

Les lettres u et v désignent une fonction.

$(x^2)' = 2x$	$(u^2)' = 2\,u'\,u$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'\,e^u$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$(\cos(u))' = -u'\sin(u)$
$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(\sin(u))' = u'\cos(u)$

$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

En ECS, nous aurons l'occasion de revoir ces formules et d'en ajouter d'autres au cours d'un chapitre dédié à la dérivation.

EXEMPLE

Q On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \big(\ln(x)\big)^2$. Étudier f sur son domaine $\mathbb{R}_+^* = \,]0\,,\,+\infty[$.

R f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction dérivables. Elle est de la forme $f(x) = u^2$ où $u = \ln(x)$, donc sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2\,u'\,u$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2\,\frac{1}{x}\,\ln(x)$$

(on pouvait aussi dériver f avec la formule du produit $(uv)' = \ldots$, en posant $u = \ln(x)$ et $v = \ln(x)$)
Étudions le signe de la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) \geqslant 0 &\iff 2\,\frac{1}{x}\,\ln(x) \geqslant 0 \\
&\iff \ln(x) \geqslant 0 \qquad \left(\text{car } \frac{2}{x} \geqslant 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*\right) \\
&\iff x \geqslant e^0 \qquad (\text{par croissance de la fonction exponentielle}) \\
&\iff x \geqslant 1
\end{aligned}$$

La dérivée est donc positive (signe + dans le tableau) quand x est plus grand que 1, et négative dans les autres cas. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

De plus $f(1) = \big(\ln(1)\big)^2 = 0$, et les limites mentionnées ne sont pas indéterminées :

$$\begin{cases}
\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty \ \text{ donc } f(x) = \big(\ln(x)\big)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \\
\ln(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \ \text{ donc } f(x) = \big(\ln(x)\big)^2 \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty
\end{cases}$$

EXERCICE 6. Étudier les fonctions suivantes.

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + x^3 + \dfrac{e^x}{2}$

2) $\forall x \in \,]0\,,\,+\infty[\,,\ f(x) = x\ln(x)$

3) $\forall x \in \,]0\,,\,\pi[\,,\ f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$

5) $\forall x \in \,]0\,,\,1[\,,\ f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

6) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

7)$^{(*)}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = xe^{-x^2/2}$

8)$^{(*)}$ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

9) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

10)$^{(*)}$ $\forall x \in [0\,,\,+\infty]\,,\ f(x) = x - \dfrac{3\sin(x)}{2 + \cos(x)}$

V.3) INTÉGRATION

La formule de calcul d'une intégrale est $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

Le tableau suivant donne des primitives de fonctions usuelles :

$f(x)$	Primitive $F(x)$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$e^{\alpha x}$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
$\cos(\alpha x)$	$\dfrac{\sin(\alpha x)}{\alpha}$
$\sin(\alpha x)$	$\dfrac{-\cos(\alpha x)}{\alpha}$

En ECS nous donnerons plusieurs autres méthodes pour calculer et étudier des intégrales.

EXEMPLE

Q Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x$.

R On reconnaît la forme $e^{2x} = e^{\alpha x}$ où $\alpha = 2$, une primitive est donc donnée par $\dfrac{e^{2x}}{2}$ et on peut écrire :

$$\int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^2-1}{2}$$

EXERCICE 7. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$

4) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

6) $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x$

7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(4x)\,\mathrm{d}x$

9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x}\,\mathrm{d}x$

10) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3+x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

12) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$