Ce "cahier de vacances" est destiné aux élèves entrant en 1ère année de BCPST.

Il propose en 7 chapitres de faire le tour des notions INDISPENSABLES à tout bachelier qui envisage des études scientifiques :

1. puissances, racine, ln et exponentielle
2. fractions, second degré
3. équations, inéquations
4. suites
5. fonctions : dérivées et limites
6. géométrie dans le plan
7. trigonométrie

Chaque chapitre comporte 4 pages :

- $\star$ page 1 : des rappels de cours (définitions, propriétés, ...).
- $\star$ pages 2 et 3 : des exercices d'applications, éventuellement proposés sous forme de QCM.
- $\star$ page 4 : les réponses des exercices ou des éléments de solutions.

Les rappels de cours ne sont pas exhaustifs et les exercices sont élémentaires mais ils doivent être parfaitement maîtrisés afin d'aborder sereinement les cours de maths en BCPST dès la rentrée.

En début d'année, nous consacrerons une séance de travail à la correction de ces exercices. Il est donc conseillé de conserver soigneusement vos calculs et pas seulement les résultats.

Puissances

Définitions : Soit $n \in \mathbb{N}$:

- pour $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{x^0 = 1}$ et $\boxed{x^n = x \times ... \times x \text{ , } n \text{ fois}}$

- pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\boxed{x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}}$ en particulier $\boxed{x^{-1} = \dfrac{1}{x}}$

Propriétés : pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\bullet\ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \bullet\ \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha} \quad \bullet\ x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad \bullet\ (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \bullet\ \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \quad \bullet\ \frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha}}$$

Racine carrée

Définition : Soit x un réel positif : $\boxed{y = \sqrt{x}}$ est l'unique réel positif tel que $\boxed{y^2 = x}$

Propriétés :

- pour x et y des réels positifs : $\boxed{\bullet\ (\sqrt{x})^2 = x \quad \bullet\ \sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y} \quad \bullet\ \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}}$

- pour x un réel quelconque : $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

Fonction exponentielle

Définition : la fonction $\boxed{\exp}$ est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\boxed{(\exp)' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1}$$

On peut noter $\boxed{\exp(x) = e^x}$ où $\boxed{e = \exp(1)}$.

Propriétés : pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\boxed{\bullet\ e^{x+y} = e^x \times e^y \quad \bullet\ e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \quad \bullet\ e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y} \quad \bullet\ e^{nx} = (e^x)^n}$

Fonction logarithme népérien

Définition : Soit x un réel **strictement positif** : $\boxed{y = \ln(x)}$ est l'unique réel tel que $\boxed{e^y = x}$

Propriétés :

⋆ $\boxed{\text{pour } x > 0 \text{ , } e^{\ln(x)} = x}$ et $\boxed{\text{pour } x \text{ réel quelconque , } \ln(e^x) = x}$

⋆ $\boxed{\ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1}$

⋆ pour $x, y > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\bullet\ \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \bullet\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \bullet\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \bullet\ \ln(x^n) = n\ln(x)}$$

QCM

Pour chaque expression, une seule égalité est correcte.
a, b, x, C représentent des réels, n et k représentent des entiers.

1. $a^5a^3 =$ (A). a^{5^3} (B). a^{15} (C). a^8

2. $a^2b^3 =$ (A). $(ab)^2b$ (B). $(ab)^5$ (C). $(ab)^6$

3. $(a^2)^n =$ (A). a^{2n} (B). a^{2+n} (C). a^{2^n}

4. $\left(3^n\right)^2 =$ (A). 3^{n^2} (B). 6^n (C). 9^n

5. $\left(a^{n^2}\right)^3 =$ (A) a^{3n^2} (B) a^{n^8} (C) a^{n^6}

6. $\dfrac{a^{n^2}}{a^n} =$ (A) a^n (B) a^{n^2-n} (C) a^{2n}

7. $a^{3n}(a^n)^2 =$ (A) a^{5n} (B) a^{6n} (C) a^{3n^3}

8. $2^{-2k} \times 3^k =$ (A). $\left(\dfrac{3}{4}\right)^k$ (B). $\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ (C). $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2k}$

9. $3^{2k+1} \times 2^{-k} =$ (A). $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^{-k}$ (B). $9\left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ (C). $3\left(\dfrac{9}{2}\right)^k$

10. $2(2\times 3^n - 3\times 2^n) =$ (A). $(4\times 12^n - 6\times 4^n)$ (B). $(4\times 3^n - 3\times 4^n)$ (C). $(4\times 3^n - 3\times 2^{n+1})$

11. $2^n + 2^n =$ (A). 4^n (B). 2^{n+1} (C). 2^{2n}

12. $(-1)^{n+2} =$ (A). $(-1)^{n+1}$ (B). $-(-1)^n$ (C). $(-1)^n$

13. $\dfrac{1}{(-1)^n} =$ (A). $(-1)^{n+1}$ (B). $-(-1)^n$ (C). $(-1)^n$

14. $(-1)^{n+1} + (-1)^n =$ (A). 0 (B). 1 (C). 2

15. $(-2)^{2n+1} =$ (A). 2^{2n+1} (B). $(-4)^{n+1}$ (C). -2×4^n

16. $\dfrac{a^2}{\sqrt{a}} =$ (A). $\sqrt{a}$ (B). $a\sqrt{a}$ c. $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$

17. $\dfrac{\sqrt{a^2+3a^2}}{\sqrt{2a}} =$ (A). $2\sqrt{a}$ (B). $\sqrt{2a}$ c. $\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

18. $2 \times \left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)^2 =$ (A). 2^n (B). 2^{n+1} (C). $\dfrac{1}{2^{n-1}}$

19. $e^{(x+\frac{1}{x})} =$ (A). $e^x + e^{\frac{1}{x}}$ (B). $e^x \times e^{\frac{1}{x}}$ (C). $e^x + e^{-x}$

20. $\dfrac{e^x}{e^{-y}} =$ (A). $e^x - e^y$ (B). e^{x-y} (C). e^{x+y}

21. $Ce^{-\ln x} =$ (A). Cx (B). $-Cx$ (C). $\dfrac{C}{x}$

22. $1 - e^{-x} =$ (A). $\dfrac{e^x - 1}{e^{-x}}$ (B). $\dfrac{e^x + 1}{e^{-x}}$ (C). $\dfrac{e^x - 1}{e^x}$

23. $\dfrac{1}{e^{-x} - 1} =$ (A). $\dfrac{e^x}{e^x - 1}$ (B). $e^x - 1$ (C). $\dfrac{e^x}{1 - e^x}$

24. $\ln(xy^2) + \ln(x) =$ (A). $2\ln(xy)$ (B). $2x\ln(y)$ (C). $\ln(x)(y^2+1)$

25. $\ln(x^2 - 1) =$ (A). $2\ln(x) - 1$ (B). $\ln(x-1) + \ln(x+1)$ (C). $\ln(x-1) - \ln(x+1)$

26. $-3\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) =$ (A). $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ (B). $\ln 8$ (C). $\ln 6$

27. $n\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) =$ (A). $\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$ (B). $\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-n}\right)$ (C). $\dfrac{1}{\ln\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}$

28. $\ln(x + x^2) =$ (A). $\ln(x) + \ln(x^2)$ (B). $\ln(x) + \ln(1+x)$ (C). $\ln(x) \times \ln(1+x)$

29. $\ln(1 + \dfrac{1}{n}) =$ (A). $\ln(n+1) - \ln(n)$ (B). $\ln(n+1) + \ln(n)$ (C). $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

30. $\ln(1 + e^x) =$ (A) $x + \ln(e^{-x} + 1)$ (B) $-\ln(e^{-x} + 1)$ (C) $1 + \ln(e^{-x} + 1)$

1. C
2. A
3. A
4. C
5. A
6. B
7. A
8. A
9. C
10. C
11. B
12. C
13. C
14. A
15. C
16. B
17. B
18. C
19. B
20. C
21. C
22. C
23. C
24. A
25. B
26. B
27. B
28. B
29. A
30. A

Opérations sur les fractions

a, b, c, d, k représentent des réels non nuls.

- multiplier 2 fractions : $\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$
- simplifier une fraction : $\boxed{\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k} \times a}{\cancel{k} \times b} = \frac{a}{b}}$
- inverse d'une fraction : $\boxed{\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}}$
- diviser 2 fractions : $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}}$
- ajouter 2 fractions qui ont **le même dénominateur** : $\boxed{\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{d}}$

Attention aux éventuelles erreurs de signe : $\frac{a}{d} - \frac{b+c}{d} = \frac{a-(b+c)}{d} = \frac{a-b-c}{d}$

second degré

Soient a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

On considère le trinôme $\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c}$ et $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ son discriminant associé.

• Si $\Delta > 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ a 2 solutions réelles : $\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$

Pour tout x réel , $\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ et $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines.

• Si $\Delta = 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ a une solution réelle : $\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}$

Pour tout x réel , $\boxed{P(x) = a(x - x_0)^2}$ et $P(x)$ est du signe de a sauf pour $x = x_0$ où $P(x_0) = 0$.

• Si $\Delta < 0$, alors l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solutions réelles et $P(x)$ est du signe de a.

• La courbe représentant la fonction P dans un repère orthonormé est une **parabole** de sommet $S(\alpha, \beta)$ où les réels α et β apparaissent naturellement lorsque l'on écrit P sous **forme canonique** :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

identités remarquables

a, b représentent des nombres réels.

$\boxed{\bullet\ (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \qquad \bullet\ (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \qquad \bullet\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Application : pour mettre un trinôme sous forme canonique, on reconnait le début d'une identité remarquable :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} \times x\right) + c = a\Big((x + \cdots)^2 - \cdots\Big) + c = \cdots$$

⋆ Exercice 1. QCM

Pour chaque expression, une seule égalité est correcte. a, b, x, t représentent des réels.

1. $\dfrac{4x^2}{\dfrac{2}{x^2}} =$ (A) $2x^4$ (B) 2 (C) 8
2. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x+1}{x} =$ (A) $-\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)$ (B) $\dfrac{x-2}{2x}$ (C) $\dfrac{-x+2}{2x}$
3. $\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{2}{x} =$ (A) $\dfrac{-2x-1}{x^2(x+1)}$ (B) $\dfrac{-2x-1}{x(x+1)}$ (C) $\dfrac{-2x+3}{x(x+1)}$
4. $\dfrac{1-x^2}{(x-1)^4} =$ (A) $-\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ (B) $\dfrac{1+x}{(x-1)^3}$ (C) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$
5. $\dfrac{e^t}{1+e^t} - 1 =$ (A) $\dfrac{-1}{1+e^t}$ (B) $\dfrac{2e^t-1}{1+e^t}$ (C) $\dfrac{e^t-1}{1+e^t}$
6. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} =$ (A) $a+b$ (B) $\dfrac{1}{a+b}$ (C) $\dfrac{ab}{a+b}$
7. $2 - \dfrac{2x+1}{x+2} =$ (A) $\dfrac{3}{x+2}$ (B) $\dfrac{5}{x+2}$ (C) $\dfrac{4x+3}{x+2}$
8. $2 - \dfrac{(x+1)^2}{x} =$ (A) $\dfrac{-x^2+1}{x}$ (B) $\dfrac{-x^2-1}{x}$ (C) $-\dfrac{x^2-1}{x}$
9. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} =$ (A) $\dfrac{2}{(x-1)}$ (B) $\dfrac{2}{x^2-1}$ (C) $\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$
10. $\dfrac{1}{(x^2-1)} - \dfrac{1}{x-1} =$ (A) $\dfrac{x-2}{x^2-1}$ (B) $\dfrac{x}{x^2-1}$ (C) $\dfrac{-x}{x^2-1}$
11. $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 =$ (A) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (B) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ (C) $\dfrac{-2+\sqrt{5}}{2}$
12. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} =$ (A) $\dfrac{-1}{\sqrt{2}+1}$ (B) $\sqrt{2}+1$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$
13. $(1-x^2)(1-x) =$ (A) $(1-x)^2(1+x)$ (B) $(1-x)(1+x)^2$ (C) $1-x^3$
14. $2x^2-5x-3 =$ (A) $(2x+1)(x-3)$ (B) $(2x-1)(x+3)$ (C) $(x+\dfrac{1}{2})(x-3)$
15. $5-2(x-1)^2 =$ (A) $-2x^2+4x+7$ (B) $-2x^2+4x+3$ (C) $-2x^2-4x+7$
16. $3(x+2)^2-8 =$ (A) $3x^2+4x-4$ (B) $3x^2+12x+4$ (C) $3x^2+6x+4$
17. $(3x-2)^2-(3x-2)(x-1) =$ (A) $(3x-2)(2x-1)$ (B) $(3x-2)(2x-3)$ (C) $(3x-2)(2-x)$

⋆ Exercice 2.

Développer :

1. $6x - 3(x+1)^2$
2. $3x(x-4)^2$
3. $(-x-7)(3-5x)$
4. $(-8x-1)^2 - (4x+3)^2$

⋆ Exercice 3.

Calculer :

1. $\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{2}$
2. $\dfrac{1}{4} - 1 + \dfrac{1}{3}$
3. $3 - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{3}$
4. $2 \times \dfrac{3}{7} \times \dfrac{14}{9}$
5. $4\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{2}\right)$
6. $27\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}\right)$

⋆ Exercice 4.

Factoriser :

1. $(5x-2)^3 - (2-5x)^2 - (2-5x)(3x-3)$
2. $25x^2 - 1 - (4x-3)(5x+1)$
3. $(3x-1)^2 - (6x+2)^2$
4. $9x^2 - 30x + 25$

⋆ Exercice 5.

Donner la forme canonique de chacune des trinômes du second degré suivants :

1. $f(x) = 3x^2 - 5x + 5$
2. $g(x) = x^2 - 3x + 1$
3. $h(t) = -2t^2 - t + 1$
4. $k(a) = 0,5a^2 + 2,5a - 7$

⋆ Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 12x - 15$.

1. Déterminer la forme canonique de f, puis une forme factorisée de f.
2. Choisir l'expression la plus adaptée pour calculer les antécédents par f de : 0, -15 et -27.
3. -30 a-t-il des antécédents ?

⋆ Exercice 7.

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^2 + 3x - 2 = 0$
2. $x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^2 + x + 1 = 0$
4. $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$
5. $2x^2 + 3x - 2 > 0$
6. $x^2 - x - 1 \leq 0$
7. $x^2 + x + 1 > 0$
8. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
9. $4x^2 + 4x + 1 < 0$
10. $x^2 + \sqrt{2}x + 1 < 0$
11. $(3x-2)(2x-1) > 0$
12. $(3x-2)(2x-3) \leq 0$
13. $(3x-2)(2-x) \geq 0$

⋆ Exercice 1.

1. A ; 2. A ; 3. B ; 4. C ; 5. A ; 6. C ; 7. A ; 8. B ;
9. B ; 10. C ; 11. B ; 12. B ; 13. A ; 14. A ; 15. B ; 16. B ; 17. A

⋆ Exercice 2.

1. $-3x^2-3$
2. $3x^3-24x^2+48x$
3. $5x^2+32x-21$
4. $48x^2-8x-8$

⋆ Exercice 3.

1. $\dfrac{13}{6}$
2. $\dfrac{-5}{12}$
3. $\dfrac{29}{9}$
4. $\dfrac{4}{3}$
5. $\dfrac{22}{3}$
6. $\dfrac{63}{2}$

⋆ Exercice 4.

1. $(5x-2)(25x^2-22x+3)$ (puis le trinôme peut de nouveau se factoriser)
2. $(5x+1)(x+2)$
3. $-3(x+1)(9x+1)$
4. $(3x-5)^2$

⋆ Exercice 5.

1. $f(x)=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\dfrac{35}{12}$
2. $g(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$
3. $h(t)=-2\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{9}{8}$
4. $k(a)=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{81}{8}$

⋆ Exercice 6.

1. $f(x)=3(x+2)^2-27=3(x+5)(x-1)$
2. $3(x+5)(x-1)=0 \iff x=1$ ou $x=-5$
   $3x^2+12x-15=-15 \iff 3x(x+4)=0 \iff x=0$ ou $x=-4$
   $3(x+2)^2-27=-27 \iff 3(x+2)^2=0 \iff x=-2$
3. $3(x+2)^2-27=-30 \iff (x+2)^2=-1$ donc -30 n'a pas d'antécédent

⋆ Exercice 7.

1. $S=\left\{-2,\dfrac{1}{2}\right\}$
2. $S=\left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
3. $S=\emptyset$
4. $S=\emptyset$
5. $]-\infty,-2[\cup]\dfrac{1}{2},+\infty[$
6. $\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$
7. $\mathbb{R}$
8. $\{3\}$
9. $\emptyset$
10. $\emptyset$
11. $]-\infty,\dfrac{1}{2}[\cup]\dfrac{2}{3},+\infty[$
12. $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$
13. $\left[\dfrac{2}{3},2\right]$

Égalités

- **avec des exponentielles :** $\boxed{e^x = e^y \text{ ssi } x = y}$ et si $a > 0$, $\boxed{e^x = a \text{ ssi } x = \ln(a)}$

- **avec des logarithmes :** pour $x > 0$ et $y > 0$, $\boxed{\ln(x) = \ln(y) \text{ ssi } x = y}$ et si $a \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(x) = a \text{ ssi } x = e^a}$

- **entre deux puissances :** attention à la parité !

$$\boxed{x^2 = y^2 \text{ ssi } x = y \text{ ou } x = -y} \quad \text{mais} \quad \boxed{x^3 = y^3 \text{ ssi } x = y}$$

- **entre deux valeur absolue :** $\boxed{|x| = |y| \text{ ssi } x = y \text{ ou } x = -y}$

- **rappel : un produit est nul ssi au moins l'un des facteurs est nul**

- **astuce :** utiliser un changement de variable pour se ramener à une équation du second degré

Inégalités

- **autorisé :**
  - ⋆ ajouter une constante k : $\boxed{\text{si } x \leq y \text{ alors } x + k \leq y + k}$
  - ⋆ ajouter terme à terme : $\boxed{\text{si } x \leq y \text{ et } x' \leq y' \text{ alors } x + x' \leq y + y'}$
  - ⋆ multiplier par une constante $\boxed{k > 0}$: $\boxed{\text{si } x \leq y \text{ alors } kx \leq ky}$
  - ⋆ multiplier par une constante $\boxed{k < 0}$: $\boxed{\text{si } x \leq y \text{ alors } kx \geq ky}$
  - ⋆ multiplier terme à terme si tout est positif : $\boxed{\text{si } 0 < x \leq y \text{ et } 0 < x' \leq y' \text{ alors } 0 < xx' \leq yy'}$
  - ⋆ passer à l'inverse si tout est positif : $\boxed{\text{si } 0 < x \leq y \text{ alors } 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}}$

- **astuce :** $\boxed{a \leq b \text{ ssi } b - a \geq 0}$ (on se ramèhne ainsi à une étude de signe)

- **interdit :** soustraire terme à terme , diviser terme à terme

- **puissances et inégalités :**
  - ⋆ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ fixé et $0 < x < y$:
    → si $\alpha > 0$ alors $0 < x^\alpha < y^\alpha$
    → si $\alpha < 0$ alors $0 < y^\alpha < x^\alpha$ (une puissance négative est un inverse)

  - ⋆ pour $x > 0$ fixé :
    → si $x > 1$ alors $\boxed{x < x^2 < x^3}$
    → si $x \in]0, 1[$ alors $\boxed{x^3 < x^2 < x}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.
Attention : on prendra soin de déterminer le domaine de validité avant de se lancer dans la résolution.

1. $x(x+2) = 2x(3x-4)$
2. $(2x^2+x+2) = (2x^2+3x-3)$
3. $|2x^2+x+2| = |2x^2+3x-3|$
4. $(2x^2+x+2)^2 = (2x^2+3x-3)^2$
5. $8x+1 \geq 2x-5$
6. $(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2)$
7. $x^2 \leq 4$
8. $x^3 \geq 8$
9. $1-x^4 \geq 0$
10. $x - \dfrac{1}{x} \geq 0$
11. $\dfrac{1}{x-2} \leq \dfrac{1}{x}$
12. $\dfrac{x^2+1}{x-1} \geq 5$
13. $\dfrac{1}{x} < -2$
14. $\dfrac{x+3}{x+2} = \dfrac{x-2}{x-1}$
15. $\dfrac{x+3}{x+2} \geq \dfrac{x-2}{x-1}$
16. $|\ln(x)| < 1$
17. $e^{x-1} = \dfrac{1}{2}$
18. $\ln(x^2-4e^2) = 1 + \ln(3x)$
19. $\ln(1+e^{-x}) = x$
20. pour n entier naturel : $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$
21. $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
22. $x^3 - x^2 - 2x = 0$
23. $6e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$
24. $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$
25. $x + \dfrac{1}{x} = 3$

1. se ramener à « $\cdots = 0$ » , factoriser le terme de gauche et utiliser le dernier rappel.

2. se ramener à « $\cdots = 0$ » et ça devient très facile.

3. utiliser le rappel sur la valeur absolue.

4. utiliser le rappel sur les puissances.

5. facile.

6. se ramener à « $\cdots > 0$ » , factoriser le terme de gauche et faire un tableau de signe.

7. on peut utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^2$

8. on peut utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^3$

9. se ramener à « $x^4 \leq$ ... » et utiliser l'allure de la courbe de la fonction $x \longmapsto x^4$

10. mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.

11. se ramener à « ... ≤ 0 » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.

12. se ramener à « ... ≥ 0 » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.

13. se ramener à « ... < 0 » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.

14. on peut faire un « produit en croix ».

15. on ne peut pas faire un « produit en croix » ! Donc se ramener à « ... ≥ 0 » , mettre au même dénominateur et faire un tableau de signe.

16. encadrer $\ln(x)$.

17. utiliser la fonction ln.

18. utiliser la fonction exp... et attention au domaine !

19. utiliser la fonction exp.

20. utiliser la fonction ln et ses différentes propriétés. Attention à la division par un nombre négatif !
21. poser $X = x^2$
22. factoriser par x
23. poser $X = e^x$
24. reconnaître une identité remarquable
25. tout mettre du même côté et au même dénominateur

1. $S = \{0, 2\}$
2. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
3. $S = \left\{\frac{5}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right\}$
4. $S = \left\{\frac{5}{2}, \frac{-1-\sqrt{2}}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right\}$
5. $S = [-1, +\infty[$
6. $S = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[\cup]3, +\infty[$
7. $S = [-2, 2]$
8. $S = [2, +\infty[$
9. $S = [-1, 1]$
10. $S = [-1, 0[\cup[1, +\infty[$
11. $S =]0, 2[$
12. $S =]1, 2] \cup [3, +\infty[$
13. $S = \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$
14. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
15. $S = \left]-2, -\frac{1}{2}\right] \cup]1, +\infty[$
16. $S =]e^{-1}, e[$
17. $S = \{1 - \ln(2)\}$
18. $S = \{4e\}$
19. $S = \left\{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$
20. $n \geq -\frac{2\ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
21. $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$
22. $S = \{0, -1, 2\}$
23. $S = \{-\ln(2), -\ln(3)\}$
24. $S = \{1\}$
25. $S = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Suites arithmétiques	**Suites géométriques**
Définition. •(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. •(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)$ est constante.	**Définition.** •(u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$. • Si la suite (u_n) ne s'annule pas, elle est géométrique si et seulement si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est constante.
Expression de u_n en fonction de n. • Si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 + nr.$$ • Les suites arithmétiques sont les suites de la forme $(an + b)$ où a et b sont deux réels. • Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p + (n - p)r.$$	**Expression de u_n en fonction de n.** • Si la suite (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, pour tout entier naturel n, $$u_n = u_0 \times q^n.$$ • Les suites géométriques sont les suites de la forme (ab^n) où a et b sont deux réels. • Si la suite (u_n) est géométrique de raison q, pour tous entiers naturels n et p, $$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$
Somme arithmétique. Pour tout entier naturel non nul n, $$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$	**Somme géométrique.** Pour tout entier naturel non nul n, $$1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

limites

si α est un entier > 0 , $\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty}$ et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0}$

si $q > 1$, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty}$

si $-1 < q < 1$, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} q^n = 0}$

QCM

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 4$ et de terme initial $u_0 = 2$,
   alors $u_{10} =$ (A). 42 (B). 24 (C). 12

2. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$.
   Si $u_1 = 5$, alors $u_8 =$ (A). -11 (B). -9 (C). 19

3. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_7 = 79$ et $u_8 = 82$.
   Alors sa raison $r =$ (A). 3 (B). $1,5$ (C). $81,5$

4. (u_n) est une suite arithmétique avec $u_{10} = 4$ et $u_{35} = 54$.
   Alors sa raison $r =$ (A). 50 (B). 2 (C). 25

5. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de terme initial $u_0 = \frac{1}{8}$,
   alors $u_{10} =$ (A). 1024 (B). 128 (C). $20,125$

6. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ avec $u_1 = 4$,
   alors sa raison $q =$ (A). 2 (B). 8 (C). $3,5$

7. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ avec $u_2 = 9$,
   alors sa raison $q =$ (A). 9 (B). 3 (C). 3 ou -3

8. (u_n) est une suite géométrique de terme initial $u_0 = 0,5$ et de raison $q = 2$,
   alors $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10} =$ (A). $1023,5$ (B). $511,5$ (C). $2818,75$

9. (u_n) est une suite géométrique avec $u_1 = 128$ et de raison $q = 0,5$,
   alors $u_1 + u_2 + ... + u_{10} =$ (A). $255,875$ (B). $704,6875$ (C). $255,75$

10. $1 + 11 + 21 + 31 + ... + 1001 =$ (A). 50100 (B). 50601 (C). 1065

11. $1 - 10 + 100 - 1000 + ... + 100000000 =$
    (A). 111111111 (B). -9090909 (C). 90909091

12. la somme des 8 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 2 vaut : (A). 255 (B). 500 (C). 510

13. (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 6$ et de raison 3.
Alors $u_n =$ (A). 6×3^n (B). 2×3^n (C). $2 \times 3^{n-1}$

14. On pose $u_n = 3 - 2n$. On reconnaît le terme général d'une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

15. On pose $u_n = 3 - n^2$. On reconnaît le terme général d'une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

16. On pose $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On reconnaît le terme général d'une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

17. On pose $u_n = \frac{3}{2^{n+1}}$. On reconnaît le terme général d'une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

18. On pose $u_n = \frac{n^2-1}{n+1}$. On reconnaît le terme général d'une suite :
(A). arithmétique (B). géométrique (C). ni arithmétique , ni géométrique

19. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n =$ (A). 0 (B). 1 (C). $-\infty$

20. $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n =$ (A). 0 (B). $-\infty$ (C). $+\infty$

21. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n+1}{2n^2-1} =$ (A). 0 (B). $\frac{3}{2}$ (C). $+\infty$

22. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{n} =$ (A). 0 (B). 1 (C). $+\infty$

1. A
2. B
3. A
4. B
5. B
6. B
7. C
8. A
9. C
10. B
11. C
12. C
13. B
14. A
15. C
16. B
17. B
18. A
19. B (utiliser $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$)
20. C (factoriser par 3^n pour retrouver la limite précédente)
21. B (factoriser par n^2 au numérateur et au dénominateur)
22. A (découper en 2 fractions et utiliser $n = (\sqrt{n})^2$)

dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$	$h(x) = f(u(x))$	$h'(x)$	remarques
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	pour $u(x) > 0$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	pour $u(x) \neq 0$
x^n	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$(u(x))^2$	$2u'(x)u(x)$	
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$			

opérations : $(u+v)' = u' + v'$ $\quad (\lambda u)' = \lambda u'$ $\quad (uv)' = u'v + uv'$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Si $u(x) = g(ax+b)$ alors $u'(x) = ag'(ax+b)$

limites des fonctions usuelles :

- **exponentielle :** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- **logarithme :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$
- **carré :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- **cube :** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- **racine carrée :** $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- **inverse :** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- **composition :** $\boxed{\text{Si } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \text{ et } \lim\limits_{t\to a} g(t) = x_0 \text{ alors } \lim\limits_{t\to a} f(g(t)) = \ell}$

x_0, a, ℓ représentent des réels ou $\pm\infty$.

⋆ Exercice 1.

Préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$ (on donnera une expression factorisée) :

1. $f(x) = (1-x)\sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$
3. $f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$
4. $f(x) = x^2 e^x$
5. $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
7. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$
8. $f(x) = \ln(4x^2+1)$
9. $f(x) = (1+\ln(x))^2$
10. $f(x) = e^{1/x}$

⋆ Exercice 2.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+1}{2x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos x)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - e^x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x})$
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{2x-1}$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

⋆ Exercice 1.

reconnaître...

1. (uv)
2. $\left(\frac{u}{v}\right)$
3. $\ln(u(x))$
4. (uv)
5. $e^{u(x)}$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)$
7. $\ln(u(x))$
8. $\ln(u(x))$
9. $(u(x))^2$
10. $e^{u(x)}$

⋆ Exercice 2.

1. mettre en facteur x au numérateur et au dénominateur
2. $\cos(0) =?$
3. mettre en facteur x au numérateur et au dénominateur dans ln.
4. facile...
5. mettre en facteur e^x.
6. composition des limites...
7. là aussi.
8. mettre en facteur x^2 sous la racine afin de factoriser x au dénominateur.
9. même chose mais avec plus de précautions. Au fait : $\sqrt{x^2} =?$
10. composition des limites.
11. mettre en facteur x au numérateur et au dénominateur.
12. Multiplier par "l'expression conjuguée".

⋆ Exercice 1.

1. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{x}}$
2. sur $]0,2[\cup]2,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}(x-2)^2}$
3. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$
4. sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = x(2+x)e^x$
5. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)e^{\sqrt{x}}$
6. sur $\mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$
7. sur $]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)(1-x)}$
8. sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{8x}{4x^2+1}$
9. sur $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2}{x}(1+\ln(x))$
10. sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}$

⋆ Exercice 2.

1. $\dfrac{3}{2}$
2. 0
3. $\ln(2)$
4. 0
5. $+\infty$
6. 1
7. $+\infty$
8. 1
9. -1
10. 0
11. $-\infty$
12. 0

On se place dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan.

produit scalaire et distances

• **définition du produit scalaire** de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$: $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$

• $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ sont **orthogonaux** ssi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ c'est-à-dire $\boxed{xx' + yy' = 0}$

• **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$: $\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}}$

• **distance** entre 2 points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$: $\boxed{AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

• équation du **cercle** de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon R : $\boxed{\Omega M = R}$ donne $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$

droites dans le plan

• **équation cartésienne** d'une droite D dans le plan : $\boxed{ax + by + c = 0}$

pour une droite non verticale ($b \neq 0$), on peut écrire $\boxed{y = px + q}$,

où $p = -\dfrac{a}{b}$ est la **pente** (ou **coefficient directeur**) et q **l'ordonnée à l'origine**.

• pour une droite D d'équation $\boxed{ax + by + c = 0}$:

vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$, **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}(-b, a)$

• pour une droite D d'équation $\boxed{y = px + q}$: **vecteur directeur** $\overrightarrow{u}(1, p)$

• pour obtenir une équation de la droite D :

1. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A), \text{ de vecteur normal } \overrightarrow{n}(a, b)}$:
   on obtient une équation de la forme $ax + by + c = 0$ en développant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ ou on calcule c en utilisant les coordonnées du point A.

2. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A), \text{ de vecteur directeur } \overrightarrow{u}(\alpha, \beta)}$:
   (a) on obtient un vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b)$ avec $\alpha a + \beta b = 0$ et on se ramène au cas précédent.
   (b) on calcule $p = \dfrac{\beta}{\alpha}$ et on obtient q en remplaçant x et y par x_A et y_A dans $y = px + q$.
   (c) on développe : $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = p = \dfrac{\beta}{\alpha}$.
   (d) on développe : $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$, où $M(x, y)$.

3. pour $\boxed{D \text{ passant par } A(x_A, y_A) \text{ et } B(x_B, y_B)}$:
   on obtient un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et on se ramène à l'une des méthodes précédentes.

⋆ Exercice 1.

Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(1,2)$ et de rayon 1.

⋆ Exercice 2.

Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation : $x^2+y^2-2x-10y+17=0$

⋆ Exercice 3.

On considère la droite D d'équation : $y=\frac{3}{2}x+1$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

⋆ Exercice 4.

On considère la droite D d'équation : $5x+2y+3=0$.

1. Déterminer un vecteur normal de D.
2. Déterminer un vecteur directeur de D.

⋆ Exercice 5.

On considère la droite D d'équation : $x=5$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

⋆ Exercice 6.

On considère la droite D d'équation : $y=5$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D.
2. Déterminer un vecteur normal de D.

⋆ Exercice 7.

On considère les points $A(3,1)$, $B(-1,-1)$, $C(1,3)$.

1. On note D_1 la droite passant par A et B.
   (a) Déterminer un vecteur directeur de D_1.
   (b) Déterminer un vecteur normal de D_1.
   (c) En déduire une équation de D_1 de la forme : $ax+by+c=0$.
2. On note D_2 la droite passant par A et C.
   (a) Déterminer la pente p de D_2.
   (b) En déduire une équation de D_2 de la forme : $y=px+q$

⋆ Exercice 8.

On considère les points $A(1,3)$, $B(2,5)$, $C(-1,4)$.

1. Déterminer l'équation de la droite (AB).
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et isocèle.
3. Déterminer les coordonnées du milieu I du segment $[BC]$.
4. Déterminer l'équation de la médiatrice du segment $[BC]$.
5. Donner une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

⋆ Exercice 1.

Utiliser la formule donnée en rappel.

⋆ Exercice 2.

$x^2 - 2x = (x - \dots)^2 - \dots$

$y^2 - 10y = (y - \dots)^2 - \dots$

L'équation : $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$ peut s'écrire : $(x - \dots)^2 + (y - \dots)^2 = \dots$.

⋆ Exercice 4.

Utiliser les rappels.

⋆ Exercice 6.

Un dessin peut aider.

⋆ Exercice 7.

Utiliser les rappels.

⋆ Exercice 8.

1. Utiliser la méthode de votre choix (voir les rappels).
2. Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$.
3. $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.
4. La médiatrice d'un segment est la droite passant par le milieu de ce segment et qui lui est orthogonale. Ici la médiatrice du segment $[BC]$ est donc la droite passant par ... et de vecteur normal ....
5. Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse.

⋆ Exercice 1.

$x^2 - 2x + y^2 - 4x + 4 = 0$

⋆ Exercice 2.

Il s'agit du cercle de centre $\Omega(1,5)$ et de rayon $R = 3$.

⋆ Exercice 3.

1. vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(1, \frac{3}{2})$ car $p = \frac{3}{2}$.
2. vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(-\frac{3}{2}, 1)$ ou aussi $\overrightarrow{n}(-3, 2)$, avec $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$

⋆ Exercice 4.

vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(5, 2)$, vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(-2, 5)$ avec $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 0$

⋆ Exercice 5.

vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(0, 1)$, vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(1, 0)$.

⋆ Exercice 6.

vecteur directeur de D : $\overrightarrow{u}(1, 0)$, vecteur normal de D : $\overrightarrow{n}(0, 1)$.

⋆ Exercice 7.

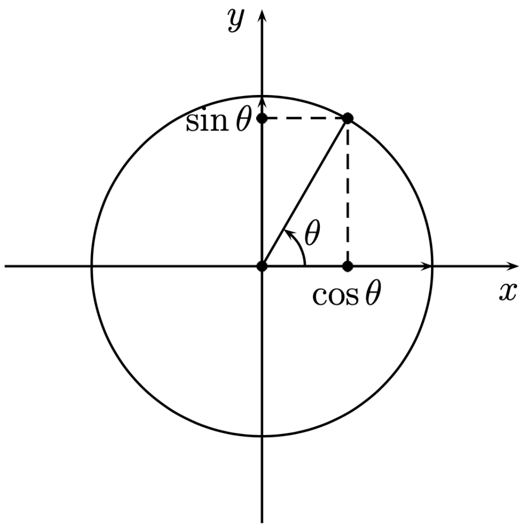
1. (a) vecteur directeur de D_1 : $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB}(-4, -2)$
   (b) vecteur normal de D_1 : $\overrightarrow{n_1}(2, -4)$, avec $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{n_1} = 0$
   (c) En développant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_1} = 0$ c'est-à-dire : $(x-3) \times 2 + (y-1) \times (-4) = 0$, on obtient : $x - 2y - 1 = 0$.
2. (a) $p = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = -1$.
   (b) une équation de D_2 est de la forme : $y = -x + q$.
   En remplaçant par les coordonnées de A, on obtient $3 = -1 + q$ d'où $q = 4$.
   D'où l'équation : $y = -x + 4$.

⋆ Exercice 8.

1. En développant $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, on obtient $y = 2x + 1$.
2. $\overrightarrow{AB}(1, 2)$ et $\overrightarrow{AC}(-2, 1)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5} = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc le triangle ABC est rectangle en A et isocèle.
3. $x_I = \dfrac{1}{2}$ et $y_I = \dfrac{9}{2}$.
4. En développant $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BC} = 0$ c'est-à-dire : $(x - \frac{1}{2}) \times (-3) + (y - \frac{9}{2}) \times (-1) = 0$, on obtient : $-3x - y + 6 = 0$.
5. Ce cercle a pour centre $I\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{2}\right)$ et pour rayon $R = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$.
   En développant :$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{9}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{10}\right)^2$, on obtient $x^2 - x + y^2 - 9y + 18 = 0$.

Trigonométrie :

Cercle trigonométrique :



Valeurs remarquables :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour tout θ dans $\mathbb{R}$: $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.

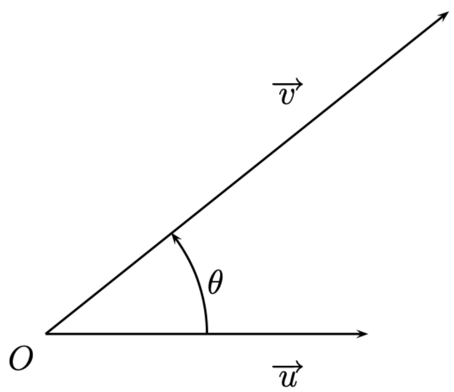
Pythagore : $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

périodicité : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$

parité : $\boxed{\cos(-\theta) = \cos(\theta)}$ et $\boxed{\sin(-\theta) = -\sin(\theta)}$

lien avec le produit scalaire :

On considère 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls. On note θ l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, avec $\theta \in [0, \pi]$.



$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\theta)}$$

⋆ Exercice 1.

QCM : pour chaque question, une seule réponse est correcte.

Remarque : on pourra dessiner le cercle trigonométrique afin de mieux visualiser les valeurs recherchées

1. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C). $\frac{1}{2}$

2. $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C). $\frac{1}{2}$

3. $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C). $\frac{1}{2}$

4. $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C). $-\frac{1}{2}$

5. $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C). $-\frac{1}{2}$

6. $\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) =$ (A). $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B). $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C). $-\frac{1}{2}$

7. Résoudre $\cos(x) = \frac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$:
   (A). $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ (B). $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ (C). $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

8. Résoudre $\sin(x) = \sqrt{3}$ sur $[0, 2\pi]$:
   (A). $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$ (B). $\emptyset$ (C). $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$

9. Résoudre $\cos(x) = 0$ sur $[-\pi, \pi]$:
   (A). $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ (B). $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ (C). $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$

10. Résoudre $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$:
(A). $\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$ (B). $\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right\}$ (C). $\left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

11. Résoudre $\cos(x) < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-\pi, \pi]$:
(A). $\left]-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right[$ (B). $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{6}, \pi\right]$ (C). $\left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right[$

12. Résoudre $\sin(x) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $[0, 2\pi]$:
(A). $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ (B). $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$ (C). $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{2\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{4\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$

13. Résoudre $\cos(x) < 0$ sur $[-\pi, \pi]$:
(A). $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (B). $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (C). $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

14. Résoudre $\cos(x) < 0$ sur $[0, 2\pi]$:
(A). $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (B). $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ (C). $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

⋆ **Exercice 2.**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(0, 1)$, $B((4, 3)$, $C(3, 0)$.

1. Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$.
2. En déduire la valeur de l'angle géométrique a entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$. En déduire la valeur de l'angle géométrique c entre $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. En déduire la valeur de l'angle géométrique b entre $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

⋆ Exercice 1.

1. C
2. A
3. B
4. A
5. C
6. B
7. C
8. B
9. C
10. B
11. B
12. A
13. B
14. C

⋆ Exercice 2.

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$, $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{20}$, $||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{10}$.
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}|| \times ||\overrightarrow{AC}|| \times \cos(a)$ donc $\cos(a) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $a = \dfrac{\pi}{4}$.
3. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$. Donc $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AC}$ et $c = \dfrac{\pi}{2}$.
4. $a + b + c = \pi$ donc $b = \dfrac{\pi}{4}$.