Quelques révisions estivales

Vous allez intégrer à la rentrée 2026, la classe préparatoire MPSI, MP2I ou PCSI du lycée Camille Guérin, toutes nos félicitations !

L'objectif du document suivant est de vous permettre d'aborder votre année mathématique en toute sérénité. Il contient des rappels de cours et des exercices du programme de **Spécialité Mathématiques de Terminale** ; il est inutile de commencer à étudier le programme de classe préparatoire avant la rentrée. En revanche, il est indispensable de consolider les acquis du lycée. Les exercices sont à traiter sans calculatrice.
Aucune inquiétude si vous n'arrivez pas à traiter certains exercices, cela ne préjugera en rien de votre capacité à réussir en classe préparatoire ! Nous aurons toute l'année scolaire pour nous entrainer aux techniques calculatoires et approfondir vos acquis.

Enfin n'oubliez pas que les vacances estivales doivent être également synonymes de repos : vous devez arriver en très bonne forme physique à la rentrée... Après vos examens du baccalauréat, pensez à faire une coupure, puis reprenez cette fiche de préparation dans le cours du mois d'août.. pas à la dernière minute cependant !

Si vous avez la moindre question concernant ce document ou concernant les études en classe préparatoire, n'hésitez pas à la poser à l'une des adresses suivantes :

- MP2I : marylene.boisseau@ac-poitiers.fr
- MPSI : coralie.renault@ac-besancon.fr
- PCSI : nicolas.hegoburu@ac-poitiers.fr

Les corrections écrites de ces exercices seront disponibles fin août sur les sites suivants :

- MP2I : https://mp2icamilleguerin.blogspot.com/
- MPSI : https://coralie.renault.math.free.fr/mpsi.html/
- PCSI :https://nicolashegoburu.fr

Au plaisir de vous retrouver à la rentrée de septembre pour une belle aventure en classe préparatoire !

I. Des exercices calculatoires

Les exercices de cette partie sont des exercices purement techniques, destinés aux étudiants qui ne se sentent pas totalement à l'aise avec les calculs...

1. Les fractions

Quelques rappels

Soient a, b, c, d des réels non nuls.

- ajouter deux fractions : $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$
- simplifier deux fractions : $\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$
- multiplier deux fractions : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- inverser une fraction : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$
- diviser deux fractions : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$

Exercice

Simplifier les expressions suivantes (x, y et z désignent trois réels strictement positifs).

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$.
2. $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$.
3. $\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$.
4. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$.
5. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$.

2. Les puissances et racines carrées

Quelques rappels

$\star$ Soient x et y des réels non nuls et n et m des entiers relatifs.

- $x^n x^m = x^{n+m}$ • $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ • $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ • $(xy)^m = x^m y^m$ • $(x^n)^m = x^{nm}$

$\star$ Soient x et y deux réels.

- Si $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$
- Si $x \geqslant 0$ et $y > 0$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
- Si $x \geqslant 0$, $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$
- Si $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

$\star$ Soient x et y deux réels. On a les identités remarquables suivantes :

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \qquad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \qquad x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

Exercice

Simplifier les expressions suivantes (x et y désignent deux réels strictement positifs).

1. $(1+\sqrt{2})^3 - 5\sqrt{2}$.
2. $\dfrac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.
3. $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
4. $\sqrt{x+2\sqrt{x}+1} \times \sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$.

3. Un petit peu de logarithme et d'exponentielle

Quelques rappels : propriétés de calcul de $\ln$ **et** $\exp$

- Soient a et b deux réels et n un entier relatif :

$$e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{na} = (e^a)^n$$

- Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln(a) \qquad \ln(a^n) = n\ln(a)$$

- Soient a un réel strictement positif et b un réel,

$$e^{\ln(a)} = a \qquad \ln(e^b) = b$$

Exercice

Soient x et y deux réels et a et b deux réels strictement positifs. Simplifier les expressions suivantes :

1. $e^{-2\ln(3)}$
2. $e^{-\ln(5)+2\ln(3)}$
3. $e^{2x} \times e^{1-2x}$
4. $\dfrac{e^{2x+4}}{e^{x+1}}$
5. $\ln\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\right) - \ln\left(\sqrt{ab}\right)$
6. $4\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) - 3\ln(a) + 5\ln(b)$

II. Etudes de fonctions

1. Les fonctions usuelles et leurs propriétés

Nous vous conseillons de bien réviser les propriétés des fonctions usuelles étudiées au lycée (ensemble de définition, limites aux bornes de l'intervalle de définition, tableau de variation, représentations graphiques). (exemples de fonctions usuelles : $x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto \sqrt{x}, x \mapsto e^x, x \mapsto \ln(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto \cos(x)$).

2. Dérivation

Quelques rappels : dérivées des fonctions usuelles

- Soit n un entier naturel. $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.
- Soit n un enter naturel non nul. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto e^x$.
- $f : x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto -\sin(x)$.
- $f : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto \cos(x)$.

Quelques rappels : opérations sur les fonctions dérivables

$\star$ Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$\star$ Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et v une fonction dérivable sur J, alors $u \circ v$ est dérivable sur I et $\boxed{(v \circ u)' = (v' \circ u)u'}$

En particulier lorsque les fonctions et leurs dérivées sont définies, on a :

- $(e^u)' = u'e^u$
- $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
- pour a entier naturel non nul, $(u^a)' = au'u^{a-1}$

Exercice

Calculer la dérivée de f, pour les fonctions ci-dessous. On admet que f est dérivable sur l'ensemble de définition dans chaque question.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 1$.
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2}$.

4. f définie sur $]-1;1[$ par $\forall x \in]-1,1[, f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

3. Intégration

Quelques rappels : les primitives usuelles

- Soit n un entier naturel. Une primitive de $f : x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ est $F : x \mapsto -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$.
- Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ est $F : x \mapsto \ln(|x|)$.
- Une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F : x \mapsto \sqrt{x}$.
- Une primitive de $f : x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto e^x$.
- Une primitive de $f : x \mapsto \cos x$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \sin x$.
- Une primitive de $f : x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto -\cos x$.

Théorème d'intégration par parties
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivables sur I et dont les dérivées sont continues sur I et soient a et b deux éléments de I. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exercice

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-x-1}{x^3}\,dx$.
On pourra décomposer l'intégrale en une somme de trois intégrales.
2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,dx$.
On pourra faire une intégration par parties, en posant pour $x \in [1,2]$,$u'(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$.
3. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.
On reconnaîtra une expression de la forme $u'e^u$.
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx$.
On pourra faire une intégration par parties.
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}\,dx$.
On reconnaîtra une expression de la forme $\frac{u'}{u^2}$.

III. Des résolutions d'équations dans $\mathbb{R}$

Quelques rappels

- Soient $a \geqslant 0$ et x un réel. $\boxed{x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}}$
- Soient $a \geqslant 0$ et x un réel $\boxed{|x| = a \iff x = a \text{ ou } x = -a}$
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. $\boxed{e^x = y \iff x = \ln(y)}$

Equations du second degré

Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$.
On considère le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ de discrimnant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\boxed{\Delta > 0}$ alors P admet $\boxed{\text{deux racines réelles distintes}}$ $\boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ et on a $\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$.
- Si $\boxed{\Delta = 0}$ alors P admet une seule racine réelle $\boxed{x_1 = \dfrac{-b}{2a}}$ et on a $\boxed{P(x) = a(x - x_1)^2}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de racine réelle.

Exercice

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $|2x - 1| = 3$
   (b) $\sqrt{x + 1} = x$
   (c) $e^{3x+4} = 2$
   (d) $\ln(2x + 1) + \ln(-x + 1) = 0$

2. Résoudre les équations suivantes :
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 49 = 0$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $x + \dfrac{1}{x} = 3$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$
   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(1 + e^{-x}) = x$

3. On considère l'équation (E) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \qquad (E)$$
   (a) Déterminer une racine évidente de (E).
   (b) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$
   et déterminer leur valeur.
   (c) Résoudre (E).

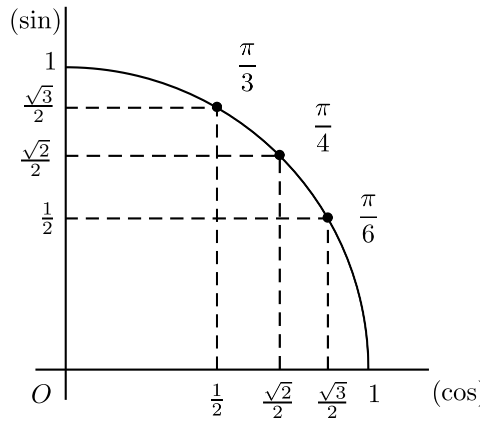
(d) Soit r une racine de (E). On pose : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(rx) \end{array}$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'''(x) - 8f''(x) + 17f'(x) - 10f(x) = 0$.

IV. Les fonctions trigonométriques

Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Formules de trigonométrie

Soient a et b deux réels.

• Parité : $\boxed{\cos(-a) = \cos(a)}$ et $\boxed{\sin(-a) = -\sin(a)}$

• Périodicité : $\boxed{\cos(a + 2\pi) = \cos(a)}$ et $\boxed{\sin(a + 2\pi) = \sin(a)}$

• $\boxed{(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1}$

Exercice

1. Donner les valeurs des $\cos$ et $\sin$ qui suivent (on pourra s'aider du cercle trigonométrique) :

   (a) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

   (b) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

   (c) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$

   (d) Soit x un réel. Que vaut $\cos(x + \pi)$? $\sin(x + \pi)$?

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

   (a) $2\sin(x) - 1 = 0$

(b) $\sin(2x+\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $4(\cos(x))^2 - 2 = 0$

(d) $-2(\sin(x))^2 + 3\cos(x) + 3 = 0$

V. Des études de suites

Suites arithmétiques

- Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$. Le réel r est la *raison* de la suite.
- Expression de u_n en fonction de n : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r, alors pour tout entier naturel n on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Somme arithmétique : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \ldots + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice

1. Parmi les suites ci-dessous, lesquelles sont des suites arithmétiques ?
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n - 1$.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 - 1$.
   (c) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 - 2n$.
   (d) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2$ et $u_0 = 1$.
   (e) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n$ et $u_0 = 1$.
2. Pour les suites de la question précédente qui sont des suites arithmétiques, calculer pour n un entier naturel $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
3. Pour la suite de la question e) de la question 1, exprimer pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

Suites géométriques

- Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$. Le réel q est la *raison* de la suite.

- Expression de u_n en fonction de n : Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors pour tout entier naturel n on a : $u_n = u_0 q^n$.

- Somme géométrique :
  - Si $q \neq 1$,
  $$\forall n \in \mathbb{N}, 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$
  - Si $q = 1$ on a
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1.$$

Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$$

1. Déterminer un réel a tel que $a = \frac{2}{3}a + 1$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - a$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et calculer la raison de cette suite.
3. En déduire, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
5. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?